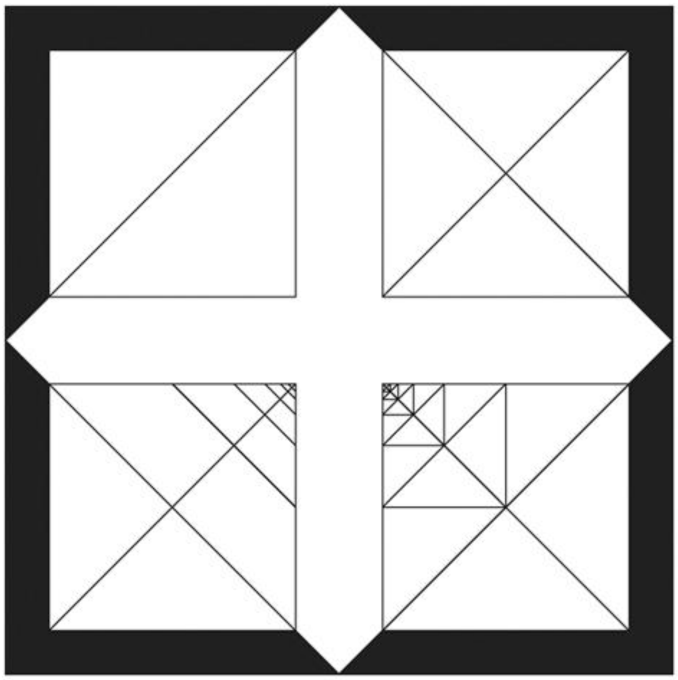
Szimmetriák tanítása 7-8. osztályban, a MADI szellemében

55. Rátz László Vándorgyűlés, Vác

Záródolgozat



Saxon Szász János : Univerzum (1979)

Készítette: Hortobágyi Bozsóka

Újpesti Könyves Kálmán Gimnázium

Budapest, 2015. augusztus

I. Bevezető

Az idei év vándorgyűlésének számomra Darvas György professzor úr Szimmetriák a matematikaoktatásban című előadása bizonyult a leginkább ihlető erejűnek. Nemcsak e záródolgozat megírásához, hanem oktatói munkám gazdagításához is felbecsülhetetlen segítséget jelentett az előadás! Ezúton is szeretném tehát megköszönni a Bolyai Társulatnak és Darvas professzor úrnak, hogy az idén is gondoskodtak arról, hogy szakmailag gyarapodhassunk.

Biztosan nem én voltam az egyedüli az előadás hallgatói között, akit meghökkentett, hogy a szimmetria nemzetközi egyesülettel büszkélkedhet. Az International Symmetry Association tevékenységét kutatva az interneten rácsodálkozhattam, hogy micsoda gazdag szellemi tevékenység folyik a világban e fogalom körül. A Symmetrion projektközpont, a Symmetry: Culture and Science folyóirat, a Nemzetközi Szimmetria Fesztiválok, a Bridges Organisation rendezvényei vagy az Élmény Műhely Mozgalom ide vonatkozó munkásságát nem volt könnyű még feltérképezni sem. Információgyűjtésem során több szálon is eljutottam (az előadó által is ajánlott) Nemzetközi Mobil MADI Múzeumhoz és egyik alapító kurátorának, Saxon-Szász Jánosnak művészetéhez.

Nagy szerencsénkre a magyarországi gyűjtemény ép Vácott lelt otthonra egy izgalmas kiállítótérben: a Városházán. Így családommal meglátogatván a kiállítást – szerény eszközeinkkel – felvételt készítettünk néhány műalkotásról, hogy eltervezzem, miként lehetne egy projektmunka keretében feldolgozni a látottakat a transzformációk tanításához. A kiállítás ingyenes volta, a művek tapinthatósága(!) és a kiváló látogatásszervezés, úgy gondolom, lehetővé teszi, hogy a helyszínen alaposan előkészíthessük a későbbi osztálytermi munkát. Mivel 7. majd 8. osztályban építjük fel a geometriai transzformációk témakört, és azon belül ekkor kezdjük alaposabban tanulmányozni az izometriákat; ekkor mélyítjük el a szimmetria fogalmát, majd tekintünk ki a centrális hasonlóságra, ezeken az évfolyamokon tartom a legmegfelelőbbnek a MADI múzeumi matekórákat. Az élményszerű tanulás mellett természetesen nagyszerű lehetőség ez a képzőművészet és a matematika átfedésével a sajnos még mindig közkedvelt humán-reál ellentétek (asszimetriák?) oldásához.

II. "Egy kis siránkozás"

Közvetlen kollégáimmal napi beszédtéma, hogy milyen mostoha sorsra jutott az elemi geometria oktatása, mennyire kiszorították a mai trendek az euklidészi szerkesztést, a mértani helyes okoskodásokat, a transzformációk alkalmazását (pl.

a bizonyításokban), és ennek eredményeképp milyen gigászi küzdelem a magasabb évfolyamokon a hasonlósági tételek megértetése, a koordináta-geometriai problémák kezelése, nem is beszélve a térgeometriai alapfogalmak tanításáról. (Nem veszítettünk-e többet a vámon, mint amennyit nyertünk a paradigmaváltással a réven?)

Gimnáziumunk igen előkelő helyen áll a hivatalos rangsorban kiváló továbbtanulási mutatókkal, így különösen elgondolkodtató az alábbi statisztikám. A 12. évfolyam középszintű próbaérettségi dolgozatának feladatai közé választottam két ízben egy négy- és egy hatévfolyamos osztályban a 2013. októberi feladatsor 7. feladatát. Az eredményt átlagolva közlöm, mert jelentős különbség nem mutatkozott az osztályok közt e feladat megoldási arányában.

A sugárveszélyt jelző tábla szimmetriáiról kellett dönteni.

Tudja, hogy tengelyesen szimmetrikus a leírással megadott egyenesre: 88%

Tudja, hogy középpontosan nem szimmetrikus: 56%

Tudja, hogy forgásszimmetrikus, és a forgatás egy lehetséges szögét is helyesen 120°-nak fogadja el: 53%

Még hosszan sorolhatnám hátborzongató tapasztalatainkat és azok elemzését, de lássuk inkább, miként küzdenék az elemi geometria érzéki vagy inkább konkrét tapasztalatot szerző megismerésének elveszítése ellen.

„...Az órák, mik mérnek minden időszakot:
Szellem találmánya, mit ember alkotott,
Mindez észrevétlen mint a hétköznapok:
Alkotó, jutalmad érte meg nem kapod!
De ha nem lennének, vagy mind lenne ritka
s talány lenne a geometria titka,
Akkor bizton tudná minden ember fia:
Semmi sem fontosabb: jó geometria!”

Robert Recorde, A tudás útjai, 1551 (de aktuálisabb, mint valaha!)

III. A váci MADI-gyűjtemény rövid ismertetése

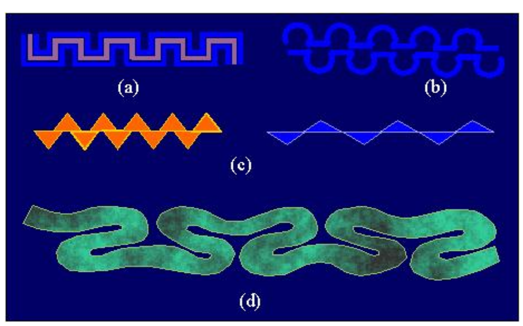
A MADI mozaikszó (**M**ozgás-**A**bsztrakció-**D**imenzió-**I**nvenció) olyan művészeti csoportosulást takar, mely elsősorban a kubista, dadaista, konstruktivista művészeti hagyományokat folytatja. Eszmeiségében fontos pl. a mobilitás és az összművészetiség. A Saxon-Szász János és Dárdai Zsuzsa művészházaspár jóvoltából a 90-es évek elején Magyarország is kapcsolódott a ma is aktív nemzetközi mozgalomhoz, hiszen a konstruktív geometrikus irányzatnak hazánkban is jelentős alkotói voltak. A MADI non-konformista szellemiségére jellemző a művészeti elitizmus feloldása, a pedagógiai elhivatottság, így nagyon szerencsés, hogy Vácott valódi közösségi térben, ingyenesen látogatható immár a Dárdai-Saxon Gyűjtemény. Ez válogatást jelent a Nemzetközi Mobil MADI Múzeum hatalmas anyagából. A 16 ország több mint 100 kiállító művészére sajnos egyénenként nem tudtam hivatkozni a felvételek elkészítése során.

Meghívó a megnyitó ünnepségre a tárlat művészeinek felsorolásával

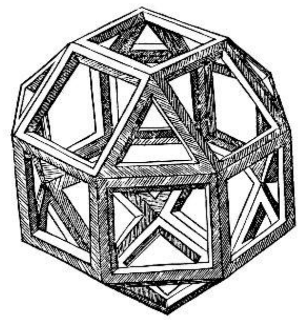
IV. Kitekintés a szimmetria fogalmának történetére

Noha a szó görög eredetű (συμ-μετροσ) és közös mértéket jelent, nyugodtan állíthatjuk, hogy a fogalom olyan ősi és egyetemes, hogy gyakorlatilag egyidős az emberiséggel. A nemrég elhunyt Slavic V. Jablan professzor Theory of Symmetry and Ornaments című munkájában olvastam azt a döbbenetes tényt, hogy mind a 7-féle ún. frízcsoportra jelent már meg példa a paleolitikumban a barlangrajzokon és csontfaragásokon! Az alábbi ábrán ős-és újkőkorszaki leleteteket láthatunk a Földközi tenger térségéből. A szimmetria-csoportjuk (a szokványos kétkarakteres jelöléssel): **mg**, vagyis az eltolás-szimmetrián kívül az eltolás irányára merőleges tengelyű tükrözésekkel és csúsztatva tükrözéssel is önmagukra képezhetők az ornamensek, továbbá középpontosan is szimmetrikusak.

.



Az antikvitásban azonban a tökéletességre való törekvés eszközének tekinthető a szimmetria, a szellemi hagyományát folytató reneszánszban is inkább világnézeti rendező elv, mint letisztult geometriai fogalom.



A fenti kép Luca Paciolinak, a De divina proportione szerzőjének kettős portréja vitatott mellékalakkal, a rombikuboktaéder elnevezésű félig-szabályos (arkhimédeszi) test tanulmányozása közben (*Jacopo de Barbari, 1495*). Pacioli művét maga Leonardo da Vinci illusztrálta olyan favázas testmodellekkel, amelyek az egyik legkiválóbb kortárs geométer képzőművészünket, Csörgő Attilát is megihlették. A szabályos (plátóni) testeket szintén azokká egyesítő Plátói szerelem című sorozatát emelném ki e helyütt munkásságából: http://www.c3.hu/~acsorgo/

V. A szimmetria fogalma a középiskolai gyakorlatban

A mai gyerekek az alábbi, félig absztrakt formában találkoznak a szimmetriákkal a matematika órán 7. ill. 8. osztályban, miután a megfelelő egybevágósági transzformációkat megfelelőképp átismételték, elsajátították. Egy alakzatot tengelyesen/középpontosan/forgás-szimmetrikusnak nevezünk, ha van olyan tengelyes-/középpontos tükrözés/elforgatás, melyet alkalmazva az alakzat önmagába megy át. Arról, hogy magukon a transzformációkon mit értünk térben: pl. hogy pontra, síkra, de akár egyenesre is tükrözhetünk a térben, és ezek különbözőek, véleményem szerint, mis-másolás folyik. 12.-ben gyakran szembesülök azzal, hogy nehezen látják át a forgástestek származtatását a diákok. De szabad-e ezen csodálkozni, ha még a pont körüli forgatást is csak igen szerényen tárgyaljuk. Ha a forgatás rendjét emlegetem – pláne ha a csúsztatva tükrözést is gyakoroltatom — aggódhatok, hogy már megint túltanítok egy témakört. Ráadásul nem látnám akadályát az eltolási-szimmetria fogalmának tanításának sem, pedig sormintával vagy parkettázással kapcsolatos feladat sem hiszem, hogy várható az érettségin. Arra is gondolnunk kell, hogy az absztrakciós úton segítené a haladást, ti. egy ponthalmaz szimmetriája: a valamely izometriával szembeni invariáns tulajdonsága. Továbblépve kiterjeszthető a szimmetriafogalom más transzformációkkal szembeni invarianciára, azaz a transzformáció által megőrzött tulajdonságok megmaradásának 'képességeként'.

VI. Két kis tanítási ötlet 7. osztályban

1. A transzformációkban való tapasztalatszerzés, a különféle hagyományos tükrözési feladatok gyakorlása után, de a síkbeli szimmetrikus alakzatok feldolgozása előtt, bontott csoporttal tervezem.

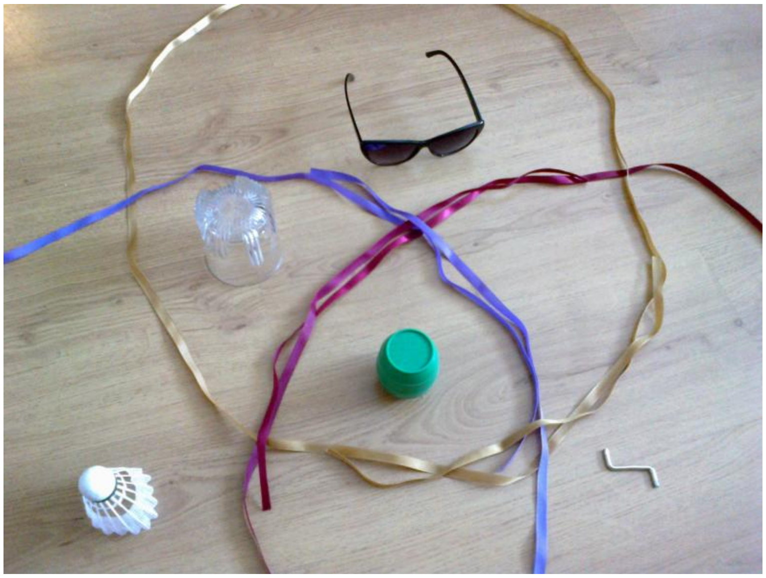
Cél: a szimmetriák érzékletes tanulmányozása, a logikai kapcsolatok megmutatása, és a háztartási formavilág gazdagságára, de esetleges matematikai átláthatóságára való rácsodálkoztatás.

Remélt haszon: síkban is könnyebben kezelik majd a szimmetriákat, ha a természetesebb (megéltebb) téri környezetben elemezzük, rendszerezzük először.

Előkészület:
Megkérjük diákjainkat, hogy hozzanak be fejenként kb. 3 olyan (limitált méretű) tárgyat közvetlen környezetükből, amik különböző mértékben tűnnek szabályosnak. Pl. evőeszközök, hajszárító. sakkbábu, guriga, DVD-tok, labda ...

Megvalósítás: A tanterem padlójára színes szalagokból jókora Venn-diagramot kanyarítunk a sík-, a forgás-, és a középpontosan szimmetrikus tárgyak csoportosításához. Egy-egy ügyesen választott reprezentáns tárgyat előre elhelyezünk (ezt jó, ha magunk visszük). A további tárgyakat egyenként kezdik elhelyezni a diákok, ha sikerült azonosítaniuk a halmazokat, és már azt is tudják, pontosan melyik metszetbe kerül az övék. Lépésenként korrigálunk, és beszéljük meg a tapasztalatokat. (Esetleg cipőket rendezve sík-illetve középpontosan szimmetrikus párrá, két halmaz azonosítását megkönnyíthetjük.) Ha néhány próbát követően átlátható már a feladat a többségnek, kis csoportokban tanári irányítás nélküli munkára is áttérhetnek.

Várhatóan egészséges vita alakul ki majd az apróbb mintázatok, részletek figyelembevételének kérdésében is.



2. A tánckoreográfiák megfigyelése szimmetrológiai szempontból nagyon újszerű és tanulságos lehet. Semmiképp sem tartom mesterkéltnek az ötletet, ugyanis aki táncolja tudja, hogy milyen elementáris élmény a ritmus és a mozdulatok szimmetriája szabta rendet követni a pl. a klasszikus balettban. Az alábbi népszerű balettrészlet kétféle koreográfiáját érdemes megfigyelni az alábbi szempontok szerint:

- Melyik kelti inkább a hópihék kavargásának illúzióját és miért?
- Mikor melyik szimmetria érvényesül a táncosok elrendezésében?
- Hogyan mozog egymáshoz viszonyítva a két szólista?
- A kisebb körökbe való rendeződést követően a forgó hópihék vajon középpontosan is szimmetrikus alakzatot alkotnak?
- Egy kiszemelt balerina mozdulataiban fedezzünk fel a szimmetrikusakat!

P.I. Csajkovszkij: Diótörő, Hópelyhek tánca
Magyar Nemzeti Balett, Budapest, Kor.: Marius Petipa-Lev Ivanov
https://www.youtube.com/watch?v=_rUSCebY9HI

Marinszkij Színház, Szentpétervár, Kor.: Vaszilij Vajnonen,
https://www.youtube.com/watch?v=xtLoaMfinbU A 44.50. perctől

Végezetül lássuk a MADI feladatokat!

VII. A múzeumi látogatás feladatai

Az alábbi hét feladatot forgószínpad-szerűen, pármunkában oldanák meg a diákok a helyszínen, majd a tanteremben közösen tapasztalatot cserélnek. (Ha ez túl nagyszabású és időigényes, akkor a tanulópárok kevesebb állomást is meglátogathatnak, majd minden feladat végrehajtását egy-egy pár ismertet.) A munka rengeteg előkészületet igényel, a tervezett használható segédeszközökre a dolgozatban csak utalok. Ha a projekt sikeresnek bizonyulna, kiterjesztéseként jó lehetőségnek látom Saxon munkássága alapján a centrális hasonlóság, és az önhasonló alakzatok vizsgálatát.

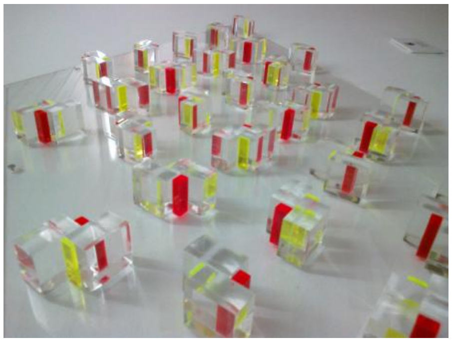
1. A manipulálható mű 3 egybevágó szabályos háromszöglemezből áll, melyek egymástól függetlenül mozgathatók. A lemezeket olyan lyukak tarkítják, melyek kisebb, párhuzamos helyzetű háromszögek egyesítései.

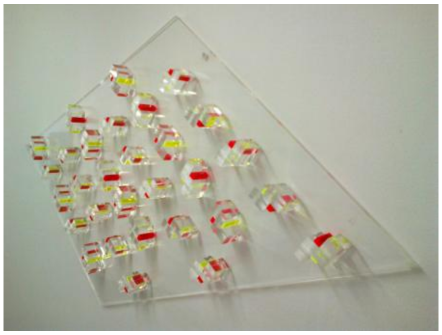
   i. A 3 réteg egymásra mozgatásával érjük el, hogy minél kisebb legyen a megmaradó lyukak összterülete!
   ii. Nevezzük néven az egyes lemezekből kivágott formákat, és csoportosítsuk szimmetriáik alapján!
   iii. Válasszunk ki egy tetszetős végeredmény és rajzoljuk le háromszögrácsra! A színezésről se feledkezzünk meg!
   iv. Próbáljuk meg elérni, hogy valamely kivágat a rétegződéssel kialakuló színezést figyelembe véve is szimmetrikus maradjon. A videón látható végeredményen ez nem teljesül, sem a rombusz, sem a paralelogramma, sem a háromszög esetén.
   v. Vizsgáljátok meg, miként változik egy kész mű, ha a legfelső lemezt átfordítjátok a 'túloldalára'. Ugyanezt a változást elérhetjük -e úgy, hogy most csak síkban mozgatjuk a fedőlemezt?

P1980363video.MOV

2. A következő, szemet gyönyörködtető mű színezett és átlátszó plexi hasábokból összeragasztott testek rendszere. A 30 elem egybevágó, de ez sem triviális az összetett transzformációk, és az optikai hatás miatt. Ferde oszloponként eltolás-szimmetrikusan van rendezve két-két ellentétes orientációjú elem. Rendkívül érdekes, hogy noha csak 90° többszöröseivel történnek elforgatások, a párhuzamos és merőleges helyzetű lapok ellenére sem könnyű átlátni a rendszert, talán a ferde elhelyezés és a párosadik oszlopok eltolása miatt. Ezért kiváló terep a rendezetlenség látszatának lefejtéséhez, és csak egyetlen feladatot adnék itt:

Élvezzétek a látványt és fejtsétek meg a struktúra megannyi titkát!





3. Az alábbi 'egyszerű és nagyszerű', középpontosan szimmetrikus elrendezésű képpárhoz az alábbi feladatötleteim támadtak:

i. Készítsétek el a képek kicsinyített másolatát a mellékelt 4 cm oldalú négyzetlapocskákból!
ii. Ennek segítségével rajzoljátok le külön is azt a síkidomot minél pontosabban, amelyet a fekete négyzet kitakar a pirosból/kékből az 1. képen.
iii. Mennyivel több a látható piros terület, mint amennyit a fekete takar?
Aki a Pitagorasz tételt már ismeri, ezt ki is számíthatja, de elég a területek különbségét jelölni a modellen.
iv. A két képet tekinthetjük úgy is, mintha kétféle egybevágó alakzattal (négyzetekkel, illetve konkáv ötszögekkel) a sík periodikus lefedése lenne a cél. Folytassuk a csempézést a megadott elemekkel. (Előre elkészítendőek a csempék színes papírból, akár a műalkotás színeivel, és ezeket A3-as lapra ragasztanák a feladatmegoldók.

4. Az alábbi két formázott vászon kivitelezésében más, de koncepciójában rokon. A szabályos ötszögeken belüli motívumok is tengelyesen szimmetrikusak volnának, de a művészek ezt tudatosan megsértik, ami dinamizmust ad a kompozíciónak.

Pontosan milyen transzformációk történtek a belső motívumokkal?

A képeken szabad méréseket végezni!

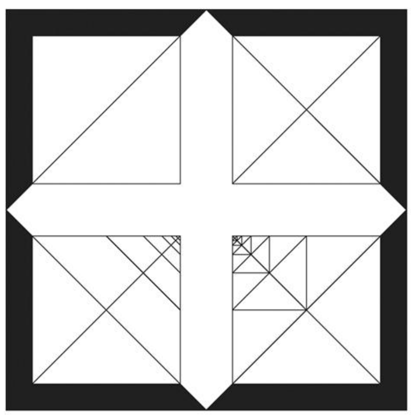
5. Forgassuk el az alábbi festményt 90°-kal az hiányzó középpontja körül. Ez a gyakorlatban megoldható pl. egy méretre vágott pauszpapír segítségével, amin a festmény 'negyedét' és ennek felosztását berajzolják a diákok.

i. Tanulmányozzuk, ahogyan miden résznégyzet a helyére kerül (az üres is), miközben a színek természetesen változnak!
ii. Milyen szabályosság figyelhető meg a színek váltakozásában?
iii. Pontosan mi a forgatás centruma?

6. A következő szenzációsan szép vászon igazán az $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlóság, és a mértani sor tanulmányozásának volna kiváló terepe, de 7-8. osztályban esetleg ilyen kérdések mentén illeszkedik a témába:

i. Figyeljétek meg a belső téglalapban a félszabályos háromszög oldalainak arányát! Mekkora a legnagyobb piros, egyenlő szárú háromszög szára méréssel/számítással (ha a legnagyobb szürke szabályos háromszög oldalát tekintjük egységnek)?
ii. Hányad része a legnagyobb piros háromszög területe a rombuszénak?
iii. Indokoljátok meg frappánsan, hogy lépésenként hányadára zsugorodik a piros háromszögek területe!
iv. Milyen szimmetriákkal rendelkezik a teljes kép, ha a piros színezést is figyelembe vesszük/ha azt gondolatban kifehérítjük?
v. Hány fokos forgatásokkal lehet két, közös csúcsú szürke háromszöget fedésbe hozni, ha közben kicsinyítés/nagyítás is megengedett?
vi. Kicsit hosszadalmasabb, de hátha valakinek van kedve otthon hozzá: rekonstruáld a kép mintázatát! Segítség az elinduláshoz: a befoglaló, 60°-os rombusz oldalait 3:2 arányban oszd fel, vagy először a $2:\sqrt{3}$ oldalarányú belső téglalapot rajzold meg!

7. Végezetül Saxon-Szász János Univerzum című gyermekkori (!) grafikájával, illetve már érett korszakából a Meditatív struktúrák III. című festményével foglalkozunk.

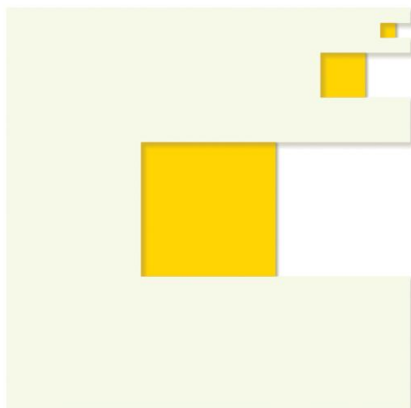


Kinyomtatjuk a reprodukciót, amennyiben az alkotó ehhez a pedagógiai cél érdekében hozzájárul. A feladat a következő:

i. Egészítsétek ki minél kevesebb vonallal a képet úgy, hogy kétszeresen tengelyszimmetrikus ábra keletkezzék!
ii. Milyen transzformációval képezhető önmagára a jobb alsó négyzet mintázata?

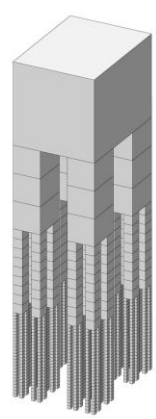
A művész sok más alkotásához hasonlóan, ez a festmény is tulajdonképp egy fraktál első három iterációs lépése. Csak az alábbi, talán a tantervi követelményeket nem meghaladó feladatot tűzném ki.

i. Milyen logika mentén szabta ki a művész a vásznat és illesztette be a sárga négyzeteket? Mekkora volna, és hol helyezkedne el a negyedik sárga négyzet, amennyiben folytatná a 'csipkézést' az alkotó? (A kép túl magasan van, de a mérete (120×120 cm) megadható.)



VII. Saxon-Szász János életre kelt fraktáljai

Saxon művészetének felfedezése számomra a fraktálokkal való első ismerkedést is jelenti. Különös, heuréka-élmény, hogy a *Dimenziósakk*tábla mellé állított *Lábatlan szék* nem más, mint egy 'megelevenedő' Cantor-halmaz. (Nem a MADI múzeum anyaga.) Így a művész munkásságában esztétikai és szakmai szempontból is szeretnék a jövőben elmélyedni.



VIII. A transzformációk tanításához is jól használható eszközökről

A Darvas György úr előadásában is említett ZOMETOOL és a Saxon-féle POLIUNIVERZUM játékcsaládban minden bizonnyal fantasztikus lehetőségek rejlenek, nagyon szívesen pályázna iskolánk beszerzésére. Jómagam csak saját GEOMAG és POLYDRON készletemmel tudom támogatni a tanítási folyamatot. Ez utóbbival pl. könnyedén modellezhetőek a sík bizonyos lefedései:

IX. A szimmetria fogalmának előfordulása a középiskolai tananyagban

Összegyűjtöttem néhány olyan geometrián kívüli fejezetet, ahol a középszintű matematikaoktatásban felbukkan a szimmetria fogalma:

i. Polinomok szimmetriája (pl. a binomiális kifejtés)
ii. Szimmetrikus egyenletek, egyenletrendszerek
iii. A Pascal-háromszög szimmetriája
iv. A páros és a páratlan függvények grafikonja
v. Relációk szimmetriája
vi. Matematikai játékok szimmetria-stratégiái

X. Geometria a képzőművészetben

Megemlítenék, illetve megismételnék néhány olyan képzőművészt, akik munkássága matematikadidaktikai szempontból is felbecsülhetetlen:

Faa Balázs, Csörgő Attila, M.C. Escher, Gáyor Tibor, Kabai Sándor, Saxon-Szász János, V. Vasarely,

XI. Felhasznált irodalom

1) Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzetei Tankönyvkiadó, Budapest, 1971
2) Csahóczi-Csatár-...: Matematika tankönyv 7-8. évfolyam, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2009
3) Richard Mankiewicz: A matematika históriája, HVG Könyvek, Budapest, 2003
4) Csiki Nóra Szakdolgozata: http://www.cs.elte.hu/~csnori/Szakdolgozat/MatekSzakdolgozat.pdf
5) S. Jablan: Theory of Symmetry: Jablan: Theory of Symmetry...
6) Az élményműhely honlapja: www.elmenymuhely.hu
7) Darvas György publikációi: Darvas György publications
8) Nemzetközi Szimmetria egyesület honlapja: » Symmetrion
9) The Bridges Organization - The Bridges Organization: art and mathematics
10) Fenyvesi Kristóf, PhD honlapja
11) Saxon-Szász János honlapja: http://www.saxon-szasz.hu
12) Csörgő Attila honlapja: *www.c3.hu/~a**csorgo**/*
13) A Nemzetközi Mobil MADI Múzeum honlapja: www.mobilmadimuseum.org
14) A Ponticulus Elektronikus Folyóirat cikke: *members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/.../szimmetria_**darvas**.html*
15) A Wikipédia különféle szócikkei a témában