Valószínűségszámítási „gyöngyszemek” a világ minden részéről

55. Rátz László Vándorgyűlés

A dolgozatot készítette: Fonyó Lajos Keszthelyi Vajda János Gimnázium

A Vácon megrendezett vándorgyűlésen többek között

„Mivel tehetjük változatosabbá a matematika órákat”.

„Probability and Statistics from a Modelling Perspective” és

„Geogebra a matematika oktatásban”

címmel hallgattam előadásokat és szemináriumot.

Ez adta az ötletet, hogy dolgozatomban egy olyan szakköri foglalkozás anyagát dolgozzam fel, ami a PowerPoint segítségével mutatja be a matematika egyik legérdekesebb témakörét a valószínűségszámítást és alkalmas arra, hogy színes problémáival megszerettesse a középiskolás tanulókkal a matematikát.

Valószínűségszámítási „gyöngyszemek” a világ minden részéről

Fonyó Lajos

1. Egy tréfás kedvű rablóvezér egy jól sikerült akció után elhelyez 4, 8, 16, 32 aranyat egy-egy bekötött zsákocskába, és arra készül, hogy másnap majd véletlenszerűen kiosztja jutalomként négy társának. Amikor ezt a többiek megtudják, nagyon megijednek, mert mindegyikük fél attól, hogy másnap balszerencsés lesz, és csak kevés arany fog jutni neki a zsákmányból. Ezért éjszaka egymás után, egyesével belopóznak a pénzes kamrába, és ott mindnyájan kibontanak két zsákocskát, tartalmukat egyesítik, a pénzt két egyenlő részre osztják, visszahelyezik a zsákocskákba, majd távoznak. Mi a valószínűsége annak, hogy a 4 rabló éjszakai látogatása után másnap mindegyikük azonos számú aranyat fog kapni a jutalmazásnál?

Megoldás:

Kedvező esetben minden rablónak $(4 + 8 + 16 + 32) : 4 = 15$ arany jut

- Bármely két tasak aranykészletének összege különböző

$$(32 + 4 \neq 16 + 8)$$

- Bármely két tasak aranykészletének átlaga 15-től különböző
  (két néggyel osztható szám átlaga páros szám)

⇒ Az első lépés után egyik zsákban sem lehet 15 arany)

A lehetséges eloszlások az első átrendezés után:

6,	6,	16,	32
8,	10,	10,	32
8,	16,	18,	18
4,	12,	12,	32
4,	16,	20,	20
4,	8,	24,	24

⇒ Ismét bármely két tasak aranykészletének átlaga 15-től különböző

⇒ A második lépés után egyik zsákban sem lehet 15 arany)

⇒ minden átrendezésben két különböző értéket képviselő zsák vett részt

⇒ minden átrendezésben két különböző értéket képviselő zsák vett részt

Az aranyak megoszlása az egyes átrendezések során visszafelé haladva:

15,	15,	15,	15	
$15 - x,$	$15 + x,$	15,	15	$(x \in \mathbb{N}^+;\ x \leq 9)$
$15 - x,$	$15 + x,$	$15 - y,$	$15 + y$	$(15 - x = 15 - y$ vagy $15 + x = 15 + y \Rightarrow y =$
$a,$	$a,$	$b,$	c	$(a = 15 - x$ vagy $15 + x \quad b, c \in \{4,8,16,32\})$
4,	8,	16,	32	

1. lépés: tetszőleges párosítás $P_1 = 1$

2. lépés: b, c párosítás $P_2 = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$

3. lépés: $15 - x,\ 15 + x$ párosítás $P_3 = \frac{2 \cdot 2}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3}$

4. lépés: $15 - x,\ 15 + x$ párosítás $P_4 = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$

$$P = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

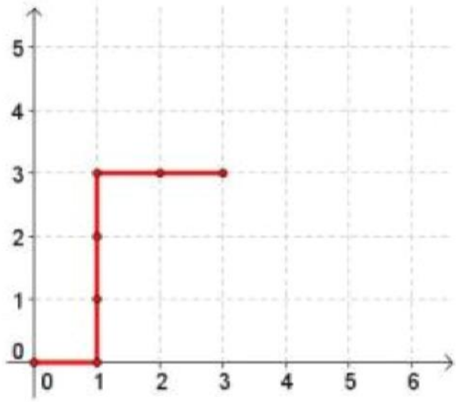
2. Egy részecskét a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a $K(0;0)$ ponttól a $V(n;n)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ pontig mozgatjuk.

Haladását egy szabályos pénzérme segítségével irányítjuk, az alábbiak szerint:

- A $P(x;y)$, $x,y \in \mathbb{N}$, $x,y < n$ pontból írás dobása esetén a $Q(x+1;y)$, fej dobása esetén pedig az $R(x;y+1)$ pontba lép.
- A $P(n;y)$ pontból írás dobása esetén nem mozdul el, fej dobása esetén pedig az $R(n;y+1)$ pontba lép.
- A $P(x;n)$ pontból írás dobása esetén a $Q(x+1;n)$ pontba lép, fej dobása esetén pedig nem mozdul el.

Mi a valószínűsége annak, hogy a részecske pontosan $2n+k$ $(k \in \mathbb{N})$ dobás után érkezik meg a $V(n;n)$ pontba?

Megoldás:
A részecske mozgása a koordinátarendszerben
$n = 3$, $k = 4$,
$IFFFIFFFFI$ dobássorozat esetén:



Probléma:

az $IFFFFIFFFI$
$IFFFFFIFFI$
$IFFFFFFIFI$
$IFFFFFFFII$

dobássorozatok ugyanazt az útvonalat jelölik ki.

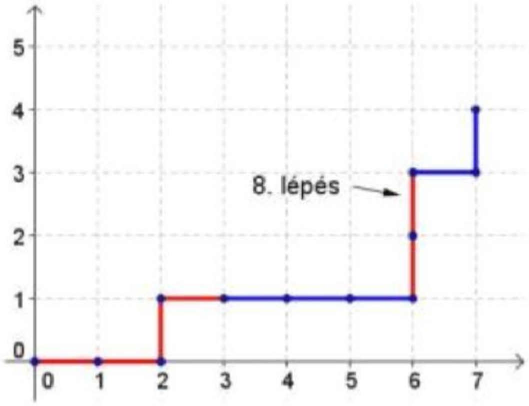
A probléma feloldása:
Engedjük meg, hogy a részecske folytassa útját keleti illetve északi irányba, ha első vagy második koordinátája eléri vagy meghaladja n értékét.

Tetszőleges dobássorozat

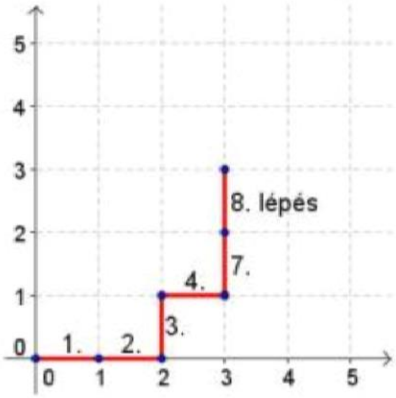
$2 \cdot 3 + 4 = 10$ dobás esetén:

$IIFIIIFFIF$

Az ehhez tartozó „kibővített” mozgás:



A részecske valódi mozgása:



Probléma:

A részecske a várt lépésszámnál hamarabb ér célba.

Következtetés:

A „kibővített” mozgás során a részecskének az egyik irányba pontosan $n + k$, a másik irányba n lépést kell megtennie.

Célpontok: $E_1(n+k; n)$, $E_2(n; n+k)$

$n = 3$, $k = 4$ esetén

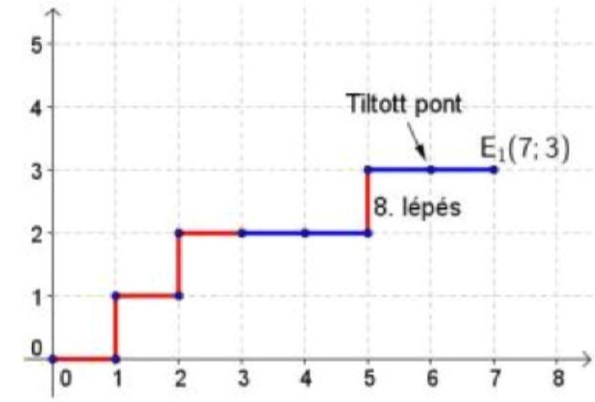
a „kibővített” mozgás célpontjai:

$E_1(7; 3)$, $E_2(3; 7)$

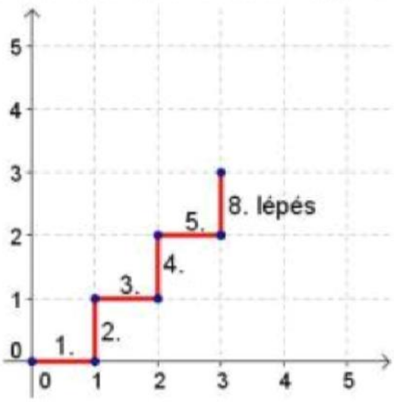
$IFIFIIIFII$

dobássorozat esetén

a részecske „kibővített” mozgása:



A részecske valódi mozgása:



Probléma:

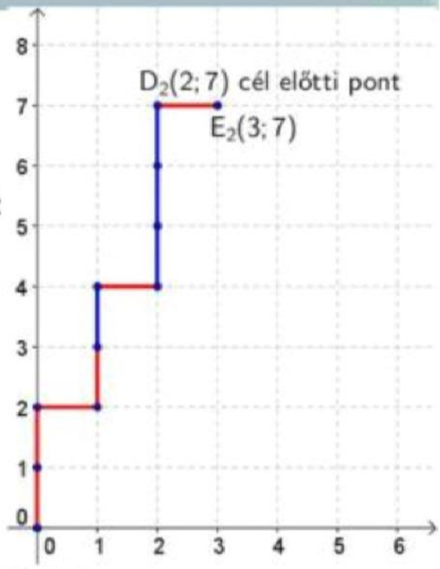
A részecske a várt lépésszámnál hamarabb ér célba.

Következtetés:

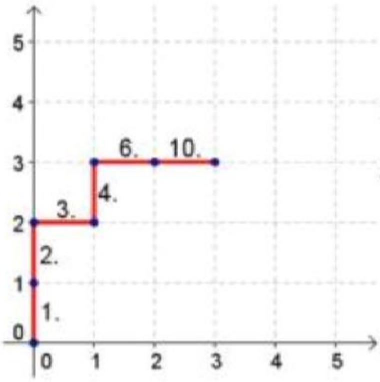
A „kibővített” mozgás során a részecske egyik koordinátája az utolsó lépésben nő n-re.

Valószínűségszámítási „gyöngyszemek”

A mozgás során tiltott pontok:
$T_1(n+k-1; n),\ T_2(n; n+k-1)$
(korábbi célba érkezés)
$n = 3,\ k = 4$ esetén egy megfelelő dobássorozat:
$FFIFFIFFFI$
A részecske „kibővített” mozgása:



A részecske valódi mozgása:



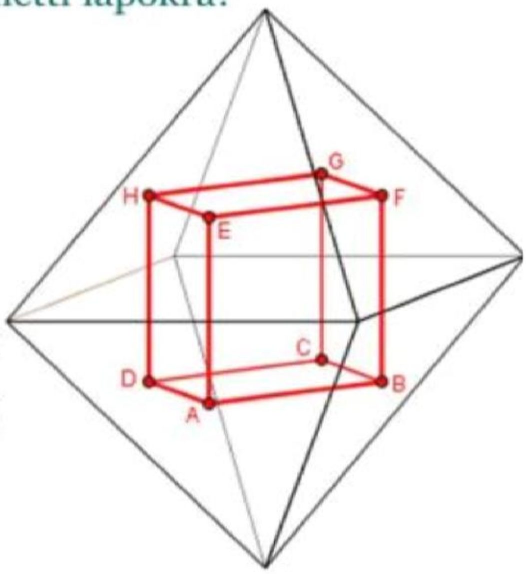
Következtetés:
A részecskének az utolsó lépése csak
$D_1(n+k; n-1) \ \rightarrow\ E_1(n+k; n)$ vagy
$D_2(n-1; n+k) \ \rightarrow\ E_2(n; n+k)$ lehet.

$$P_k = 2\binom{2n+k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k} = \binom{2n+k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k-}$$

Valószínűségszámítási „gyöngyszemek”

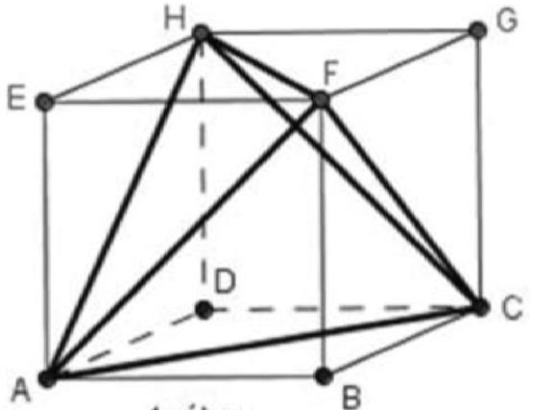
3. Egy szabályos oktaéder lapjaira felírjuk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat úgy, hogy mindegyikre különböző szám kerüljön. Mi a valószínűsége annak, hogy a szomszédos számok és az $1, 8$ számpár sem kerülnek egymás melletti lapokra?

Megoldás:
Az oktaéder lapjaihoz rendeljük hozzá a duális kocka csúcsait:

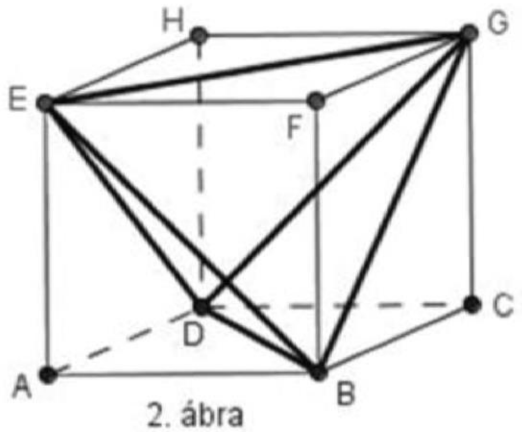


Az oktaéder lapjaihoz tartozó számokat a duális kocka csúcsaihoz rendeljük.

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 számokat tartalmazó olyan köröket keressük, amelyek csak lapátlókból és testátlókból állnak.



1. ábra



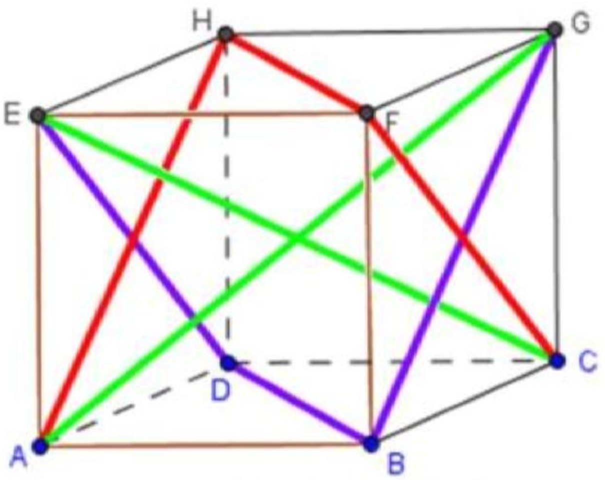
2. ábra

Kocka: 12 lapátló, 4 testátló

A lapátlók két páronként idegen *ACFH* és *BCEG* tetraédert határoznak meg.

A köröknek páros számú testátlót kell tartalmaznia.

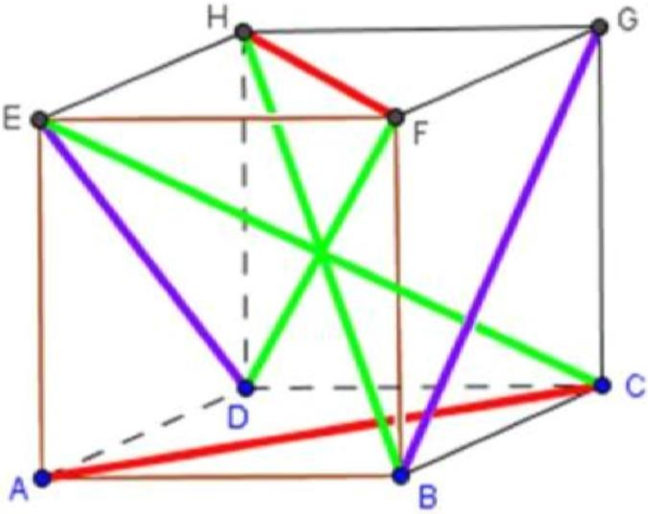
Esetek:



a) a kör az *ACFH* és *BDGE* tetraéderek 3-3 élét és az azokat összekacsoló két testátlót tartalmazza

$$\frac{4!}{2} \cdot 2 = 24 \text{ kör}$$

b) a kör váltakozva az *ACFH* és *BDGE* tetraéderek egy-egy kitérő él párjának egy-egy tagját, és az azokat összekapcsoló négy testátlót tartalmazza



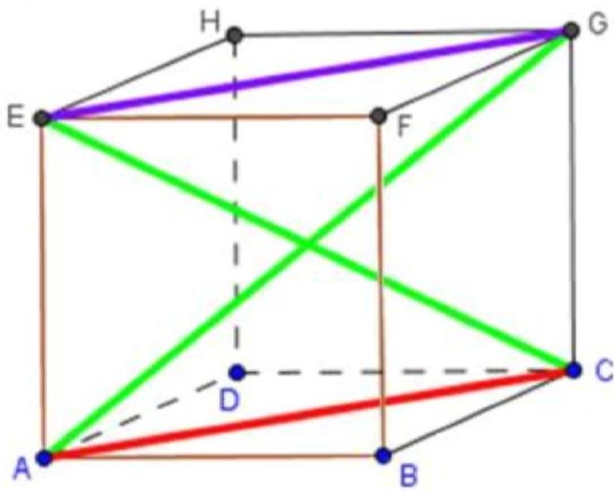
Tiltott párosítások:

AC–FH *GE–BD*

AH–CF *GB–ED*

AF–CH *GD–EB*

Két 4-4 pontból álló kör keletkezik



$$3 \cdot 2 = 6 \text{ kör}$$

A körökön a számok elhelyezési lehetőségeinek száma: $8 \cdot 2$

Kedvező esetek száma: $8 \cdot 2 \cdot 30 = 480$.

Összes esetek száma: $8! = 40320$

$$P = \frac{480}{40320} = \frac{1}{84}$$

4. Egy részeg ember áll egy szakadék szélétől egy lépésre, azaz ha egy lépést tesz előre, akkor lezuhan és meghal. Véletlenszerűen lépked, p $(0 \le p \le 1)$ valószínűséggel távolodik a szakadéktól, $1-p$ valószínűséggel pedig közeledik felé. Adjuk meg menekülésének esélyét p függvényében!

Megoldás:

P_n annak a valószínűsége, hogy a vizsgált személy n lépés távolságról beleesik a szakadékba $(n \in \mathbb{N}^+)$

$$P_1 = (1-p) + p \cdot P_2$$

$$P_2 = P_1^2$$

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2$$

$$pP_1^2 - P_1 + 1 - p = 0$$

$$P_1 = 1 \text{ illetve } P_1 = \frac{1-p}{p}$$

$$pP_1^2 - P_1 + 1 - p = 0$$

$$P_1 = 1 \text{ illetve } P_1 = \frac{1-p}{p}$$

$p = 0$ esetén: $P_1 = 1$

$p = 1$ esetén: $P_1 = 0$,

$p = \frac{1}{2}$ esetén: $P_1 = 1$ (a két gyök egyenlő)

$0 < p < \frac{1}{2}$ esetén: a 2. gyök 1-nél nagyobb, így $P_1 = 1$,

$\frac{1}{2} < p < 1$ esetén: a P1 a folytonosság miatt nem veheti fel a teljes intervallumon az egyes értékeket, így $P_1 = \frac{1-p}{p}$

$$0 < \frac{1-p}{p} < \frac{1}{p} - 1 < 1$$

$$1 - P_1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{p}, & \text{ha } \frac{1}{2} < p \le 1 \end{cases}$$

5. Egy kör kerületén véletlenszerűen kijelölünk n különböző pontot. ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 3$) Jelölje P_n annak a valószínűségét, hogy a kör középpontja az n pont konvex burkának belső pontja. Adjuk meg n függvényében P_n-t és számoljuk ki a P_3 és P_4 valószínűségeket!

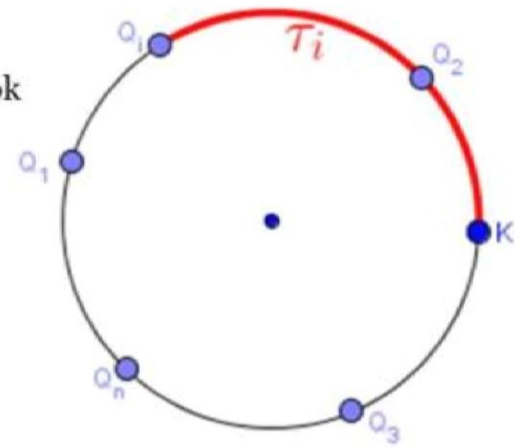
Megoldás:

Egység kerületű kör, K rögzített pont

$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ véletlenszerűen kijelölt pontok

Ívhossz szerinti paraméterezés

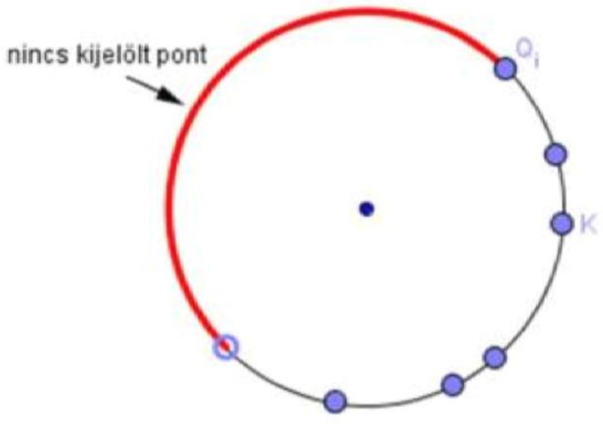
$KQ_i = \tau_i \quad (0 \leq \tau_i < 1)$

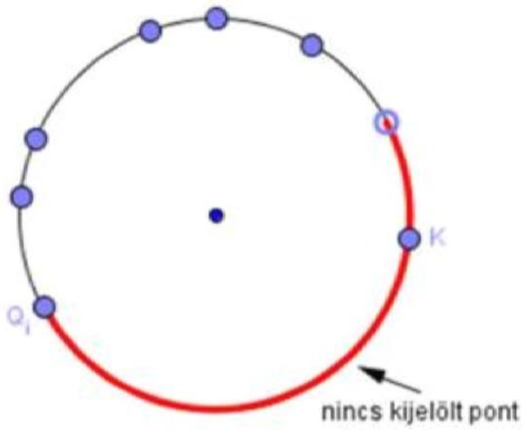


B_i az az esemény, amelyre

$0 \leq \tau_i < \frac{1}{2}$ esetén a $\left(\tau_i; \tau_i + \frac{1}{2}\right)$-ben

$\frac{1}{2} \leq \tau_i < 1$ esetén a $(\tau_i; 1) \cup \left[0;\ \tau_i - \frac{1}{2}\right)$-ben nem található véletlenszerűen kijelölt pont.





A_n az az esemény, amikor a kör középpontja nincs a $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ pontok konvex burkának belsejében

$$A_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

$$P(B_i B_j) = 0 \qquad (1 \le i < j \le n)$$

$$P(B_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P(A_n) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$P_n = 1 - P(A_n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

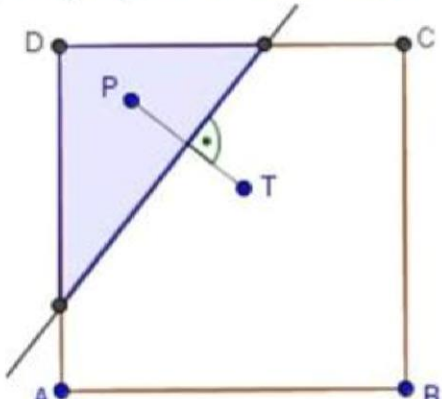
$$P_3 = \frac{1}{4}, \qquad P_4 = \frac{1}{2}$$

6. Timi és Pali egy játékot játszik az S négyzetben. Először Timi választ egy T pontot S-en, majd Pali jelöl ki egy T-től különböző P pontot. Timi nyitott, Pali pedig becsukott szemmel választja ki a pontját. Ezután kiszínezik S azon részeit, amely Q pontjaira $PQ \le TQ$. Timi akkor nyer, ha a kék tartomány egy háromszög Hol válassza meg Timi a T pont helyét, hogy legnagyobb valószínűséggel nyerjen? Határozzuk meg ekkor nyerésének esélyét!

Megoldás:

Legyen $AB = 1$, PT felezőmerőlegese l.

A kék rész pontosan akkor egy háromszög, ha az A, B, C, D pontok közül csak egy van l-nek P-vel azonos partján.



1. ábra

A, C középpontú AT, CT sugarú körök: $k_A(T)$, $k_C(T)$

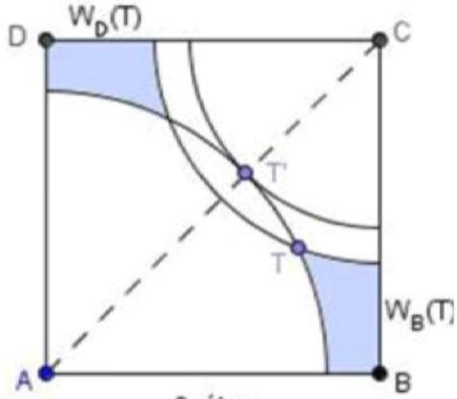
Nyerő régiók: $W_B(T)$, $W_D(T)$

$$T' = AC \cap k_A(T)$$

$T' \neq T$ esetén

$$W_B(T) \subset W_B(T')$$
$$W_D(T) \subset W_D(T')$$

$\Rightarrow$ T legyen az AC átlón



2. ábra

$AT=r$ $\quad (0 < r < \sqrt{2})$ $\quad CT = \sqrt{2} - r$

Cél: a fehér rész területe minimális legyen

$\sqrt{2} - 1 \leq r \leq 1$ esetén a fehér rész területe:

$$\frac{\pi}{4}\left(r^2 + \left(\sqrt{2} - r\right)^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - \sqrt{2}r + 1\right) = \frac{\pi}{2}\left(r - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}$$

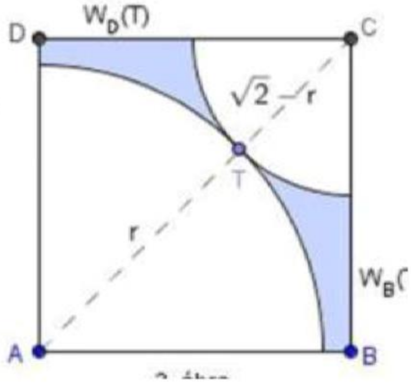
Minimum: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén $\frac{\pi}{4}$

$AT > 1$ vagy $CT > 1$ esetén már az egyik rész területe is több $\frac{\pi}{4}$-nél

$W_A(T) + W_C(T)$-re hasonló megállapítás tehető.

$$P = \frac{t[W_A(T)] + t[W_B(T)] + t[W_C(T)] + t[W_D(T)]}{t_{ABCD}} =$$

$$= \frac{2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

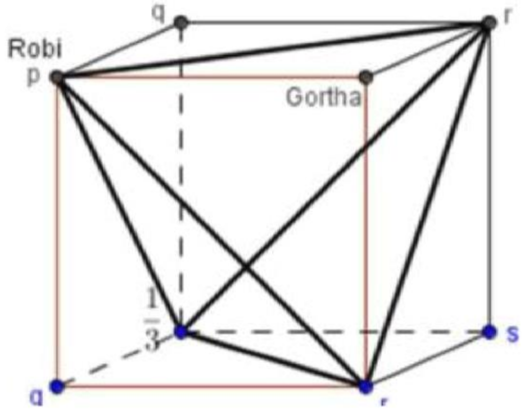


7. Robi, hat barátja és Gortha a szörny egy kocka alakú bolygó csúcsaiban állnak. Robi és Gortha a kocka szomszédos csúcsaiban vannak, és Robi kezében van egy krumpli. A krumpli ezután vándorútra indul,és minden lépésben tulajdonosa továbbdobja azt valamelyik szomszédjának mindaddig, amíg az Gorthához el nem jut. Ő megeszi a krumplit. Mi a valószínűsége annak, hogy Robi az, aki megeteti a szörnyet?

Megoldás:

p: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet,

q: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumplit valamelyik Gorthával nem szomszédos barátjától kapta,



Valószínűségszámítási „gyöngyszemek”

p: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet,

q: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumplit valamelyik Gorthával nem szomszédos barátjától kapta,

r: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumpli Gortha egyik Robitól különböző szomszédjától indul,

s: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumpli Robival átellenes helyzetű barátjától indul.

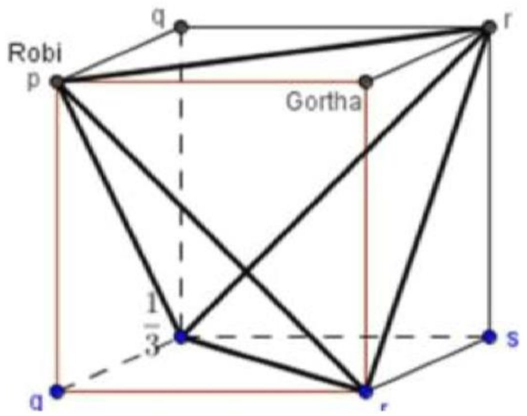
$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}q$$

$$q = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}r + \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}s$$

$$s = \frac{2}{3}r + \frac{1}{9}$$

$$p = \frac{7}{12}$$



Köszönöm a figyelmet!