A témaválasztásról:

Ezzel a dolgozattal **Pintér Ferenc** tanár úr **Mivel tehetjük változatosabbá a matematika órákat (Tehetséggondozás észrevétlenül)** című előadásához próbálok kapcsolódni. Az általam összeállított két feladatsor a 2015-ös évszám apropójából született. A feladatsorok természetesen ismétlő, gyakorló órákon, szakkörökön is feldolgozhatók, de én első, századik vagy egyéb nevezetes órára szánom. Van olyan csoportom, ahol nem feladatsorként történő megoldását tervezem, hanem egy-egy órára, egy-egy feladatot „becsempészve”**.** Remélem, minél több tanuló érdeklődését sikerül felkeltenem.

Budapest, 2015. augusztus 24. Czinki József

Feladatok 2015-tel kapcsolatban. (8. osztályosoknak)

1.
   a) Hány pozitív prímosztója van a 2015-nek?
   b) Hány pozitív páros osztója van a 2015-nek?
   c) Hány pozitív osztója van a 2015-nek?
   d) Soroljuk fel a 2015 összes pozitív osztóját!

2. Bontsuk fel a 2015-öt
   a) két olyan pozitív egész szám összegére, amelyek csupa páratlan számjegyből állnak!
   b) két pozitív prímszám összegére!
   c) három különböző pozitív prímszám összegére!

3. Hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben csak a 2015 számjegyei szerepelhetnek, és
   a) minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet!
   b) minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet, valamint minden esetben a nagyobb számjegynek meg kell előznie a kisebbet!
   c) minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet, valamint minden esetben a páros számjegynek meg kell előznie a páratlant!
   d) a számjegyek többször is előfordulhatnak!

4. Mi az utolsó számjegye a következő hatványoknak?
   a) 5^{2015} b) 6^{2015} c) 4^{2015} d) 2^{2015} e) 3^{2015} f) 7^{2015} g) 9^{2015} h) 2015^{2015}

5. Adott a térben 2015 db különböző pont, amelyekre igaz, hogy nem található a térben olyan egyenes, ami ezek közül 3 pontot tartalmazna. Hány különböző szakaszt határoznak meg ezek a pontok?

6. Adott a síkon egy derékszögű háromszög és 2015 különböző egyenes. A háromszöget tükrözzük valamelyik egyenesre, majd a képháromszöget egy újabb egyenesre, és ezt az eljárást folytatjuk úgy, hogy tetszőleges sorrendben minden egyenesre pontosan egyszer tükrözünk. Milyen esetekben marad a körüljárási irány változatlan az eredeti és az utoljára megkapott háromszöget összehasonlítva, és milyen esetekben változik meg?

Megoldásvázlatok:

1. A *2015* prímtényezős felbontása: $5 \cdot 13 \cdot 31$
   a. *3* pozitív prímosztója van a *2015*-nek, nevezetesen: 5; 13; 31.
   b. Mivel a prímtényezős felbontásban nem szerepel a *2*, ezért a *2015*-nek nincs pozitív páros osztója.

c. A *2015* pozitív osztóinak száma: $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=2$ (Ha a tanuló nem ismeri a kiszámítási módot, akkor ki is térhetünk rá, de 8. osztályos korban elfogadhatónak tartom, ha csak megszámolja.)

d. „0 tényezős” osztó: **1**
1 tényezős osztók: **5**; **13**; **31**
2 tényezős osztók: $5\cdot 13=\mathbf{65}$; $5\cdot 31=\mathbf{155}$ **;** $13\cdot 31=\mathbf{403}$
3 tényezős osztó: $5\cdot 13\cdot 31=\mathbf{2015}$

2.

a. A feladatnak nincs megoldása, hiszen két csupa páratlan számjegyből álló szám mindegyike páratlan, és két páratlan szám összeg nem lehet páratlan.

b. Mivel a 2015 páratlan, ezért két prímszám összegeként csak úgy tudjuk előállítani, ha az egyik prímszám páros, vagyis a 2. Ekkor a másik prímszámnak a 2013-nak kellene lenni, az viszont nem az, hiszen a számjegyei összegéből látszik, hogy osztható *3*-mal. Tehát a 2015 nem állítható elő két pozitív prímszám összegeként.

c. A megfelelő számhármas keresésére alkalmazható a következő stratégia: A 2015-nél kisebb prímszámok közül a legnagyobb a 2011. Tehát lehetséges egy ilyen felírás, hogy $2011+2+2$, de ez nem felel meg a feladat szövegének, hiszen a prímszámoknak különbözőknek kell lenni. A 2011-nél kisebb prímszámok közül a legnagyobb a 2003. A következő lehetséges felírás, hogy $2003+7+5$, és ez már teljesíti a feladat követelményeit. (Ha van olyan diák, aki számítógépes programozással foglalkozik, akkor megpróbálkozhat az összes felírás számítógépes meghatározásával.)

3.

a. A megszokott szemléltetés segítségével könnyen indokolható, hogy $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=\mathbf{18}$ ilyen négyjegyű szám létezik.

b. A feladat szövegéből adódik, hogy a négy különböző számjegynek csökkenő sorrendben kell követnie egymást. Vagyis **egy eset** van az 5210.

c. Ha minden esetben a páros számjegynek meg kell előznie a páratlant, és minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet, akkor a keresett számok első jegye a 2, második jegye a 0. **Két eset** van: 2015 és a 2051.

d. Az ezres helyiértéken 3 féle számjegy szerepelhet (0-át ide nem írhatunk, mert nem kapnánk négyjegyű számot), a százas, tízes, egyes helyiértékek mindegyikén pedig 4 féle számjegy foglalhat helyet. Ez összesen $3\cdot 4\cdot 4\cdot 4=\mathbf{192}$ esetet jelent.

4.

a. Az 5 minden pozitív egész hatványa 5-re végződik, tehát 5^{2015} utolsó jegye: **5**

b. A 6 minden pozitív egész hatványa 6-ra végződik, tehát 6^{2015} utolsó jegye: **6**

c. A 4 pozitív egész hatványai felváltva 4-re és 6-ra végződnek, tehát 4^{2015} utolsó jegye: **4**

d. A 2 pozitív egész hatványai végződései periodikusan ismétlődnek, a periódus a 2; 4; 8; 6 számjegyekből áll. Ebből adódóan 2^{2015} utolsó jegye: **8**

e. A 3 pozitív egész hatványai végződései szintén periodikusan ismétlődnek, a periódus a 3; 9; 7; 1 számjegyekből áll. Ebből adódóan 3^{2015} utolsó jegye: **7**
f. A 7 pozitív egész hatványai végződései szintén periodikusan ismétlődnek, a periódus a 7; 9; 3; 1 számjegyekből áll. Ebből adódóan 7^{2015} utolsó jegye: **3**
g. A 9 pozitív egész hatványai felváltva 9-re és 1-re végződnek, tehát 9^{2015} utolsó jegye: **9**
h. 5-re végződő szám minden pozitív egész hatványa 5-re végződik, tehát 2015^{2015} utolsó jegye: **5**

5. A kérdés az, hogy a 2015 pont közül bármely két pontot összekötve hány szakaszt kapunk. 1 pontból 2014 szakaszt tudunk behúzni. 2015 pontból $2015 \cdot 2014$ szakaszt húzhatunk be. De így minden szakaszt mindkét végpontjából indulva behúzunk, ezért a 2015 pont által meghatározott szakaszok száma: $\frac{2015 \cdot 2014}{2} = 2029105$.
6. Mivel a tengelyes tükrözés a derékszögű háromszög körüljárási irányát megváltoztatja, és páratlanszor tükrözünk, ezért az eredeti és az utoljára megkapott háromszög körüljárási iránya minden esetben ellentétes lesz.

Feladatok 2015-tel kapcsolatban. (emelt szint)

1.
    a. Összeadtunk 4030 db szomszédos egész számot, és 2015-öt kaptunk. Melyik számokat adtuk össze?
    b. Összeszoroztunk két egész számot, és 2015-öt kaptunk. Határozzuk meg az összes ilyen számpárt!
    c. Írjuk fel a 2015-öt két négyzetszám különbségeként!

2. Mekkora területet zár körbe az $x\epsilon[0;1]$, $x \to x^{2015}$ függvény, az x tengely és az $x = 1$ egyenes?

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
    a. $\sin(2015x) + \sqrt{3}\cos(2015x) = -1$
    b. $log_{2015}x + log_{2015^3}x = log_{2015}2015^7 - 4 \cdot log_{2015^4}x$

4. Egy számtani sorozat első öt elemének az összege 2015. Ha az első eleméhez hozzáadunk 64-et, akkor az a második elemnél 2-vel kisebb számmal, és a negyedik elemmel együtt egy mértani sorozat első három elemét adja. Melyik ez a mértani sorozat?

5. Vegyünk egy egységoldalú ABCD négyzetet. Kössük össze az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontját a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontjával. Majd a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontját a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontjával. Ezután a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontját a DA oldal D-hez közelebbi harmadolópontjával. Végül a DA oldal D-hez közelebbi harmadolópontját az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontjával. Belátható, hogy így egy újabb négyzetet kapunk, nevezzük ezt első transzformáltnak. Ezzel megismételve az előző eljárást kapjuk a második transzformáltat. Mennyi a 2015. transzformált kerülete és területe?

6. Milyen $f: R \to R$ függvényre igaz a következő összefüggés?

$$2015 \cdot f(x) = f(2015 - x) + x^{2015}$$

Megoldásvázlatok:

1.
    a. Válasszuk x-nek a legkisebb keresett egész számot. Mivel valahány egymást követő egész szám számtani sorozatot alkot, ezért felírható a következő egyenlet:

$$\frac{x + x + 4029}{2} \cdot 4030 = 2015$$

Ennek megoldása: $x = -2014$
A keresett egymást követő 4030 egész szám első tagja a -2014.

b. A 2015 prímtényezős felbontása $5 \cdot 13 \cdot 31$.
A keresett számpárokat a következő táblázat mutatja

1	-1	5	-5	13	-13	31	-31
2015	-2015	403	-403	155	-155	65	-65

c. Legyen a keresett két négyzetszám x^2 és y^2 a következő feltételekkel: $x, y \epsilon Z^+$ és $x > y$. Felírható: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2015$. Felhasználva a b. feladatrész eredményeit elkészíthetjük a következő táblázatot:

$x-y$	$x+y$	x	y	x^2	y^2
1	2015	1008	1007	1016064	1014049
5	403	204	199	41616	39601
13	155	84	71	7056	5041
31	65	48	17	2304	289

A 2015 tehát négyféle módon is felírható két négyzetszám különbségeként.

2. $\int_0^1 x^{2015} dx = \left[\frac{x^{2016}}{2016}\right]_0^1 = \frac{1^{2016}}{2016} - \frac{0^{2016}}{2016} = \frac{1}{2016}$. A keresett terület $\frac{1}{2016}$ területegység.

3.

a.

$$\sin(2015x) + \sqrt{3}\cos(2015x) = -1$$
$$\frac{1}{2} \cdot \sin(2015x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2015x) = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin(2015x) + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos(2015x) = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2015x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} - 2015x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in Z \qquad \frac{\pi}{6} - 2015x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4030} + \frac{2k\pi}{2015} \quad k \in Z \qquad x_2 = -\frac{7\pi}{12090} + \frac{2k\pi}{2015} \quad k \in Z$$

b.

$$log_{2015}x + log_{2015^3}x = log_{2015}2015^7 - 4 \cdot log_{2015^4}x \quad \text{kikötés: } x > 0$$
$$log_{2015}x + log_{2015}x^{\frac{1}{3}} = 7 \cdot log_{2015}2015 - 4 \cdot log_{2015}x^{\frac{1}{4}}$$
$$log_{2015}x + \frac{1}{3} \cdot log_{2015}x = 7 - 4 \cdot \frac{1}{4} log_{2015}x$$
$$\frac{7}{3} \cdot log_{2015}x = 7$$

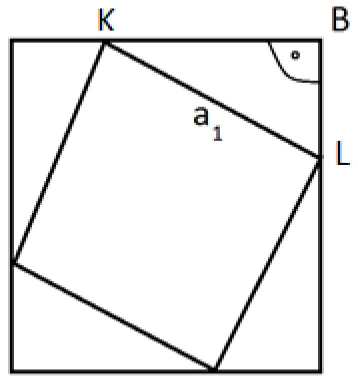
$$log_{2015}x = 3$$
$$log_{2015}x = log_{2015}2015^3$$

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt logaritmusok „elhagyása” ekvivalens átalakítás, ezért: $x = 2015^3$

4. A számtani sorozat első öt eleme: a_1; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$; $a_1 + 3d$; $a_1 + 4d$
A mértani sorozat első három eleme: $a_1 + 64$; $a_1 + d - 2$; $a_1 + 3d$
Felírható a következő egyenletrendszer:
$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 2015 \\ \frac{a_1+d-2}{a_1+64} = \frac{a_1+3d}{a_1+d-2} \end{cases}$$
$Megjegyzés$: $Az\ a_1 - 64\ és\ az\ \ a_1 = -d + 2\ esetekben\ az\ egyenletrendszer\ nem\ értelmezhető.$
$De\ mivel\ ezek\ az\ esetek\ nem\ felelnek\ meg$
$a\ feladat\ feltételeinek, megtehetjük\ a\ következő\ kikötéseket$: $a_1 \neq -64\ és\ az\ \ a_1 \neq -d + 2$

Az egyenletrendszer a következő másodfokú egyenletre vezet:
$$3d^2 - 463d - 27400 = 0$$
Ennek megoldásai: $d_1 = 200$; $d_2 = -\frac{137}{3}$. Ezekből adódik: $a_{1_1} = 3$; $a_{1_2} = \frac{1483}{3}$
A keresett mértani sorozatok első három elemükkel megadva:
67; 201; 603, valamint $\frac{1675}{3}$; $\frac{1340}{3}$; $\frac{1072}{3}$. Ezek a sorozatok valóban megoldásai a feladatnak.

5. A KBL derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz tételt kapjuk: $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Az első tarnszformált kerülete $K_1 = \frac{4\sqrt{5}}{3}$. Mivel minden négyzet hasonló, ezért a transzformált négyzetek kerületei rendre egy mértani sorozat elemei, melynek hányadosa: q=$\frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. A 2015. transzformált kerülete:



$K_{2015} = K_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2014} = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2015} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-257}$ hosszúságegység.

Az első tarnszformált területe $T_1 = \frac{5}{9}$. Minden négyzet hasonló, ezért a transzformált négyzetek területei is rendre egy mértani sorozat elemei, melynek hányadosa: $q = \frac{5}{9}$
A 2015. transzformált területe:

$T_{2015} = T_1 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2014} = \left(\frac{5}{9}\right)^{2015} \approx\ 4{,}2 \cdot 10^{-515}$ területegység.

Megjegyzés: Az eredeti feladatot szövegezhetjük úgy is, hogy a diáknak legyen feladata annak igazolása is, hogy a transzformált alakzatok négyzetek.

6. Megoldandó: $2015 \cdot f(x) = f(2015 - x) + x^{2015}$

Alkalmazzuk az $x = 2015 - x$ behelyettesítést

$$2015 \cdot f(2015 - x) = f(2015 - (2015 - x)) + (2015 - x)^{2015}$$

$$2015 \cdot f(2015 - x) = f(x) + (2015 - x)^{2015}$$

$$f(2015 - x) = \frac{f(x) + (2015 - x)^{2015}}{2015}$$

Az eredeti egyenletbe ezt visszahelyettesítve:

$$2015 \cdot f(x) = \frac{f(x) + (2015 - x)^{2015}}{2015} + x^{2015}$$
$$2015^2 \cdot f(x) = f(x) + (2015 - x)^{2015} + 2015 \cdot x^{2015}$$
$$(2015^2 - 1) \cdot f(x) = (2015 - x)^{2015} + 2015 \cdot x^{2015}$$

A megoldás:

$f: R \to R \quad f(x) = \frac{(2015-x)^{2015} + 2015 \cdot x^{2015}}{(2015^2-1)}$