Bertalan Zoltán vagyok, az idén is részt vettem a Rátz László vándorgyűlésen, amelyen sok érdekes előadáson vehettem részt. Az idei előadások közül Szoldatits József tanár úr ismeretlenek egész részét tartalmazó egyenletekről szóló előadását választottam, amellyel kapcsolatban írom a dolgozatomat. Ebben a dolgozatban olyan problémákat választottam, amelyeknek megoldásához olyan diofantoszi egyenleteket kell megoldani, amelyben az ismeretlenek értéke 0 vagy 1 lehet csak.

SUDUKU

Egy 9x9-es táblázat fel van osztva 9 db 3x3-as kisebb táblázatra. Ennek a táblázatnak minden celláját kell kitölteni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekkel úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

- A 9x9-es táblázat minden sorában szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.
- A 9x9-es táblázat minden oszlopában szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.
- Minden 3x3-as táblázatban szerepeljen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike.

A 9x9-es táblázat néhány elemének ismeretében meg kell határozni a táblázat hiányzó elemeit.
Például meg van adva egy ilyen 9x9-es táblázat, és ismert a táblázat néhány eleme:

5			**7**			**2**		
		9	**6**					**3**
	7			**4**	**1**			**8**
	2					**6**		
	5		**3**	**2**	**4**		**7**	
		7					**3**	
7			**5**	**3**			**2**	
9					**6**	**3**		
		5			**9**			**7**

Ekkor a táblázat hiányzó celláit kétféleképpen lehet kitölteni a megadott feltételeknek megfelelően.

5	*6*	*1*	**7**	*8*	*3*	**2**	*9*	*4*
8	*4*	**9**	**6**	*5*	*2*	*7*	*1*	**3**
2	**7**	*3*	*9*	**4**	**1**	*5*	*6*	**8**
3	**2**	*8*	*1*	*9*	*7*	**6**	*4*	*5*
1	**5**	*6*	**3**	**2**	**4**	*8*	**7**	*9*
4	*9*	**7**	*8*	*6*	*5*	*1*	**3**	*2*
7	*1*	*4*	**5**	**3**	*8*	*9*	**2**	*6*
9	*8*	*2*	*4*	*7*	**6**	**3**	*5*	*1*
6	*3*	**5**	*2*	*1*	**9**	*4*	*8*	**7**

5	*6*	*4*	**7**	*8*	*3*	**2**	*9*	*1*
8	*1*	**9**	**6**	*5*	*2*	*7*	*4*	**3**
2	**7**	*3*	*9*	**4**	**1**	*5*	*6*	**8**
3	**2**	*8*	*1*	*9*	*7*	**6**	*5*	*4*
1	**5**	*6*	**3**	**2**	**4**	*8*	**7**	*9*
4	*9*	**7**	*8*	*6*	*5*	*1*	**3**	*2*
7	*4*	*1*	**5**	**3**	*8*	*9*	**2**	*6*
9	*8*	*2*	*4*	*7*	**6**	**3**	*1*	*5*
6	*3*	**5**	*2*	*1*	**9**	*4*	*8*	**7**

A táblázat kitöltésének módszere a visszalépéses (BACKTRACK) algoritmus módszerén alapul.

De van egy ötletem!

Definiáljuk az X_{ijM} mennyiséget úgy, hogy $X_{ijM}=1$ teljesüljön, ha a táblázat i-ik sorában és j-ik oszlopában szerepel az M számjegy, ellenkező esetben $X_{ijM}=0$ teljesüljön. Itt $i\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $j\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $M\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:

#1: A 9x9-es táblázat minden sorában a M számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^{j=9} X_{ijM}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \qquad M\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

#2: A 9x9-es táblázat minden oszlopában a M számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^{i=9} X_{ijK}=1; \qquad j\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \qquad M\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

#3 Minden 3x3-as cellában minden $M\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ számjegy pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{\substack{i=1;2;3\\ j=1;2;3}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=1;2;3\\ j=4;5;6}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=1;2;3\\ j=7;8;9}} X_{ijM}=1$$

$$\sum_{\substack{i=4;5;6\\ j=1;2;3}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=4;5;6\\ j=4;5;6}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=4;5;6\\ j=7;8;9}} X_{ijM}=1$$

$$\sum_{\substack{i=7;8;9\\ j=1;2;3}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=7;8;9\\ j=4;5;6}} X_{ijM}=1 \qquad \sum_{\substack{i=7;8;9\\ j=7;8;9}} X_{ijM}=1$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.
#4 A 9x9-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ számjegyek pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két számjegyet nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{M=1}^{M=9} X_{ijM}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \qquad j\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

Ez 81 darab egyenletet jelent.

Így van összesen 9x9x9 darab = 729 darab X_{ijM} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak, továbbá van 4x81 darab = 324 darab egymástól nem feltétlen független egyenletekből álló elsőfokú egyenletrendszer. (Az egyenletek némelyike következhet a többi egyenletből, vagy az egyenletek némelyike ellentmondhat a többi egyenletnek. Ez utóbbira példa, amikor a táblázat néhány eleme úgy van megadva, hogy például az ötödik sorban három 2-es számjegy szerepel. Ha az egyenletekből álló egyenletrendszer ellentmondásos, akkor a 9x9-es táblázatot nem lehet kitölteni a feltételeknek megfelelő módon.)

Ha ismert a táblázat néhány eleme, akkor az X_{ijM} ismeretlen változók értéke sokkal kevesebb. Például, ha a táblázat 2-ik sorában és 5-ik oszlopában a 7-es számjegy szerepel, akkor a következő egyenletek adódnak:

$X_{257}=1$

$X_{2j7}=0$ ha $j\neq5$ (a 2-ik sor 5-ik cellájának kivételével sehol sem szerepelhet a 7-es számjegy.)

X_{i57}=0 ha i≠2 (az 5-k oszlop 2-ik cellájának kivételével sehol sem szerepelhet a 7-es számjegy.)

X_{ij7}=0 ha $i\in\{1;2;3\}$ és $j\in\{4;5;6\}$ amennyiben i≠2 és j≠5 (A táblázat 1, 2, 3 sorának és 4, 5, 6 oszlopának metszeteként előálló 3x3 résztáblázatában csak a középső cellájában szerepel a 7-es számjegy, a többi helyen nem szerepelhet.)

X_{25K}=0 ha M≠7 (A táblázat 2-ik sorában és 5-ik oszlopában csak a 7-es számjegy szerepelhet.)

Tehát a mostani példában X_{257}=1 ismeretében további 32 darab X_{ijM} változó értéke ismert.

Így a „Sudoku" táblázat kitöltése visszavezethető egy sok egyenletből álló sok ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldására.

LATIN-GÖRÖG NÉGYZET

Euler foglalkozott a következő problémával egy 1782-ben megjelent írásában.
A 36 tiszt feladata: Tekintsük a hadsereg 6 fegyvernemét és 6 rendfokozatát. Vegyünk minden fegyvernemből 6 különböző rendfokozatú tisztet. Ez összesen 36 tisztet jelent. Elrendezhető-e ez a 36 tiszt egy 6 hat sorból és 6 oszlopból álló alakzatban úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban minden fegyvernem és minden rendfokozat képviselve legyen a tisztek által?
Euler az *a, b, c, d, e, f,* latin betűkkel jelölte a fegyvernemeket és az *α, β, γ, δ, ε, ζ* görög betűket használta a rendfokozatok jelölésére. Egy katonatisztet egy latin és egy görög betűből álló pár jelöl, így a 36 katonatisztet összesen 36 darab betűpárral lehet egyértelműen jelölni. Így ezt a 36 betűpárt kell úgy elhelyezni egy 6x6-os táblázatba, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a 6 latin betű szerepeljen (*a, b, c, d, e, f*), továbbá minden sorban és minden oszlopban mind a 6 görög betű (*α, β, γ, δ, ε, ζ*) szerepeljen. (Ez az eredete a „latin-görög négyzet problémája" elnevezésnek.) Euler nem tudta megoldani a feladatot. Úgy gondolta, hogy nincs is megoldás, és azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ha *k* 4-gyel osztva 2-őt ad maradékul, akkor nincs *k*x*k* méretű latin-görög négyzet. A kérdés nehézségét mutatja, hogy csak 1900-ban sikerült bebizonyítani Terry matematikusnak, hogy a 36 tiszt feladata nem megoldható. 1922-ben McNeish bebizonyította, hogy ha *k* 4-gyel osztva nem 2-őt ad maradékul, akkor létezik *k*x*k* méretű latin-görög négyzet.

Most tekintsük csak a 4x4-es latin-görög négyzet problémáját!

Adott a következő 16 darab betűpár: **Aα, Aβ, Aγ, Aδ, Bα, Bβ, Bγ, Bδ, Cα, Cβ, Cγ, Cδ, Dα, Dβ, Dγ, Dδ.** Ezt a 16 betűpárt kell elhelyezni egy 4x4-es táblázatba, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a 4 latin betű szerepeljen („**A**", „**B**", „**C**", „**D**"), továbbá minden sorban és minden oszlopban mind a 4 görög betű („**α**", „**β**", „**γ**", „**δ**") szerepeljen. Egy ilyen elrendezés például a következő:

Aα	**B**β	**D**γ	**C**δ
Bγ	**Aδ**	**C**α	**D**β
Dδ	**C**γ	**Aβ**	**B**α
Cβ	**D**α	**B**δ	**Aγ**

Ez a feladat is megoldható számítógépes program segítségével, de megint támadt egy ötletem!

Legyen P_{ijK} értéke 1, ha az *i*-ik sorban és a *j*-ik oszlopban a *K*-ik latin betű szerepel az ebben a sorrendben felírt „**A**", „**B**", „**C**", „**D**" betűk közül, ellenkező esetben legyen P_{ijL} értéke 0. Legyen Q_{ijL} értéke 1, ha az *i*-ik sorban és a *j*-ik oszlopban a *L*-ik görög betű szerepel, az ebben a sorrenben felírt „**α**", „**β**", „**γ**", „**δ**" betűk közül, ellenkező esetben legyen Q_{ijL} értéke 0. Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:
#1p: A 4x4-es táblázat minden sorában a *K*-ik latin betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^{4} P_{ijK}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4\} \qquad K\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#2p: A 4x4-es táblázat minden oszlopában a *K*-ik latin betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^{4} P_{ijK}=1; \qquad j\in\{1;2;3;4\} \qquad K\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#3p: A 4x4-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az ebben a sorrendben felírt „**A**”, „**B**”, „**C**”, „**D**” betűk pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két betűt nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{K=1}^{4} P_{ijK}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4\} \qquad j\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#1q: A 4x4-es táblázat minden sorában az *L*-ik görög betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{j=1}^{j=4} Q_{ijL}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4\} \qquad L\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#2q: A 4x4-es táblázat minden oszlopában a *L*-ik görög betű pontosan egyszer szerepelhet, azaz:

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{ijL}=1; \qquad j\in\{1;2;3;4\} \qquad L\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#3q: A 4x4-es táblázat minden cellájában a feltételeknek megfelelően kell lennie az ebben a sorrendben felírt „**α**”, „**β**”, „**γ**”, „**δ**” betűk pontosan egyikének, ami egyúttal azt is jelenti, hogy bármely cellába egyidejűleg két betűt nem lehet írni. Azaz:

$$\sum_{L=1}^{L=4} Q_{ijL}=1; \qquad i\in\{1;2;3;4\} \qquad j\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab egyenletet jelent.

#4: Már csak azt kell elérni, hogy minden lehetséges latin-görög betű párosítás szerepeljen a táblázatban. Ekkor egy latin-görög betűpár pontosan egyszer szerepelhet a táblázatban. Ekkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie:

$$\sum_{i=1;j=1}^{i=4;j=4} \left(P_{ijK} Q_{ijL}\right)=1; \qquad K\in\{1;2;3;4\} \qquad L\in\{1;2;3;4\}$$

Ez 16 darab másodfokú egyenletet jelent.

Így van összesen 4x4x4 darab = 64 darab P_{ijK} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak, van összesen 4x4x4 darab = 64 darab Q_{ijL} ismeretlen változónk, amelyek értéke 0 vagy 1 lehet csak továbbá van 6x16 darab = 96 darab egymástól nem feltétlen független elsőfokú egyenletből és 16 darab másodfokú egyenletből álló egyenletrendszer. Ennek az egyenletrendszernek egy lehetséges megoldásából egyértelműen előállítható egy 4x4-es latin-görög négyzet.

Ez a módszer bár elvileg jó, gyakorlatilag szinte kivitelezhetetlen. Egyszerűbb backtrack algoritmust használó program segítségével ilyen latin-görög négyzeteket keresni.

SAKKTÁBBLA BEJÁRÁSA A HUSZÁR FIGURÁVAL.

Régi klasszikus probléma egy 8x8-as sakktábla a huszár figurával. Mint ismeretes, a huszárral úgy lehet lépni, hogy egy huszárlépéssel először két egységet kell ugrani, majd erre az ugrásra merőlegesen egy egységet kell ugrani, ahol egy egység a sakktábla egy mezőjének oldalát jelenti. (Az ugrások a sakktábla rácsvonalaival párhuzamosak, illetve a sakktábla rácsvonalaira merőlegesek.) A probléma lényege, hogy a sakktábla egy mezőjéből kiindulva egy huszárral be kell járni a sakktábla összes mezőjét lehetőleg úgy, hogy az utolsó lépéssel a huszár abba a mezőbe jusson vissza, ahonnan elindult.

Euler megoldotta ezt a feladatot, úgy hogy először a sakktábla egyik felét járta be, majd utána a sakktábla másik felét. (Ha a sakktábla egy mezőjében *k* szerepel, akkor a huszár közvetlenül a *k*-adik lépés előtt abban a mezőben volt.) Ez a megoldás a következő:

18	27	16	1	54	63	44	37
9	2	19	26	45	38	55	62
28	17	8	15	64	53	36	43
3	10	25	20	39	46	61	56
24	29	14	7	52	57	42	35
11	4	21	32	47	40	49	60
30	23	6	13	58	51	34	41
5	12	31	22	33	48	59	50

Wenzelider nevű morva hivatalnok is talált egy megoldást. A megoldás külön érdekessége az, hogy minden sorban és minden oszlopban a lépések sorszámainak az összege 260. Ez a megoldás a következő:

10	27	34	49	8	47	54	31
35	50	9	28	53	32	7	46
26	11	52	33	48	55	30	5
51	36	25	12	29	6	45	56
24	13	38	61	44	57	4	19
37	62	23	16	1	20	43	58
14	39	64	21	60	41	18	3
63	22	15	40	17	2	59	42

Feleltessük meg a sakktábla mezőit egy gráf csúcsainak. A gráf V_1 csúcsa legyen az „A1” mező, a gráf V_2 csúcsa legyen az „A2” mező, a gráf V_3 csúcsa legyen az „A3” mező,…….., a gráf V_{63} csúcsa legyen az „H7” mező, a gráf V_{64} csúcsa legyen az „H8” mező. Legyen ez a gráf olyan, hogy bármely két csúcsát pontosan egy él kösse össze, függetlenül attól, hogy a sakktáblának a két csúcsnak megfelelő mezőjének egyikéből a másikába egy huszárlépéssel el lehet jutni, vagy sem. Továbbá legyen ez a gráf olyan, hogy bármely két csúcsát összekötő él értéke legyen 1, ha a sakktáblának a két csúcsnak megfelelő mezőjének egyikéből a másikába egy huszárlépéssel el lehet jutni, egyébként az él értéke legyen 0. Ekkor a sakktáblán a huszár által bejárt körút a gráfon egy olyan Hamilton-körként jelenik meg, amelynek 64 éle van és mindegyik él értéke 1.

Számozzuk meg a Hamilton-kör éleit V_1-ból indulva. Definiáljunk az $X_{M;N;K}$ mennyiséget, amelynek értéke 1, ha a Hamilton-kör K-adik éle a gráf V_M csúcsából a gráf V_N csúcsába vezet, ellenkező esetben legyen az $X_{M;N;K}$ mennyiség értéke 0. Legyen C_{MN} értéke 1, ha a gráf V_M és V_N csúcsát összekötő élének értéke 1, ellenkező esetben legyen $C_{M;N}$ értéke 0. Ekkor tekintsük a következő lineáris függvényt, ahol $C_{M;N}$ értéke adott, és az $X_{M;N;K}$ változó értékét úgy kell meghatározni, hogy ennek a lineáris függvénynek az értéke maximális legyen. Az $X_{M;N;K}$ változó értéke 0 vagy 1 lehet. Az M; N; K indexek lehetséges értékei 1, 2, 3, …., 63, 64.

$$\sum_{K=1}^{64}\sum_{M=1}^{64}\sum_{N=1}^{64} C_{M;N} X_{M;N;K}$$

A következő feltételeknek kell teljesülnie:

A Hamilton-kör K=1 éle V_1-ből indul, azaz $\sum_{N=1}^{64} X_{1;N;1} = 1$ és $X_{1;N;K}$=0 ha $K \neq 1$.

A Hamilton-kör K=64 éle V_1-be érkezik, azaz $\sum_{M=1}^{64} X_{M;1;64} = 1$ és $X_{M;1;K}$=0 ha $K \neq 64$.

A gráf V_M és V_N csúcsa között pontosan 1 él lehetséges, ahol $M \in \{1; 2;..; 63; 64\}$ és $N \in \{1; 2;..; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A gráf V_M csúcsából pontosan egy él indul ki, ahol $M \in \{1; 2;..; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64}\sum_{N=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A gráf V_N csúcsába pontosan egy él érkezik, ahol $N \in \{1; 2;..; 63; 64\}$. Ekkor a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$\sum_{K=1}^{64}\sum_{M=1}^{64} X_{M;N;K} = 1$$

A Hamilton-kör jellegéből következik, hogy ha a gráf V_P csúcsából V_Q csúcsába a Hamilton-kör $K1$-edik éle vezet, akkor a gráf V_Q csúcsából V_R csúcsába a Hamilton-kör $K2$-edik éle vezet, ahol $K2$ eggyel több $K1$-nél. Ekkor a következő egyenletnek kell teljesülnie, ahol $K1 \in \{1; 2;..; 63; 64\}$, $K2 \in \{1; 2;..; 63; 64\}$, $Q \in \{1; 2;..; 63; 64\}$, továbbá $K2$-$K1$=1.

$$\sum_{P=1}^{64} X_{P;Q;K1} = \sum_{R=1}^{64} X_{Q;R;K2}$$

Ez tulajdonképpen egy lineáris programozási feladat, amely akár az Excel táblázatkezelő Solver menüjének alkalmazásával is elvileg megoldható. Mivel ennek a lineáris programozási feladatnak nagyon sok X változója van (a változók értéke 0 vagy 1), és a korlátozó feltételek száma is nagyon sok, ezért az Excel gyakorlatilag nem tud ezzel a feladattal mit kezdeni.

Ez a probléma szintén megoldható elvileg egy BACKTRACK algoritmust használó program segítségével, de gyakorlatilag az így történő megoldáshoz is nagyon sok idő szükséges.

TÁRSASJÁTÉK

Adott egy társasjáték, amelynek a neve „Okoskodj gazdagon”, tehát nem „Gazdálkodj okosan”. Tegyük fel, hogy egy partiban pontosan három játékos játszik egyszerre ezzel a játékkal a játék szabálya szerint. A játékban van első helyezett (ő 3 pontot kap ebben a partiban), van második helyezett (ő 2 pontot kap ebben a partiban), van harmadik helyezett (ő 1 pontot kap ebben a partiban).

Tegyük fel, hogy 12 játékos benevez egy „Okoskodj gazdagon” bajnokságba. Ezt a bajnokságot úgy kell megszervezni, hogy bármely 3 játékos összekerülhet pontosan egy partiban, tehát összesen 220=kombináció(12;3) partit kell lebonyolítani ebben a bajnokságban. Mivel 12 játékos van, és egy partiban pontosan 3 játékos játszik, így egyszerre 4 partit lehet megrendezni egy úgynevezett fordulóban, ezért összesen legalább 220:4=55 fordulóra van szükség. A feladat az, hogy el kell készíteni egy 55 fordulóból álló bajnokságnak a menetrendjét, azaz meg kell mondani, hogy melyik forduló melyik partijában melyik játékosok játszanak ebben az 55 fordulóból álló bajnokságban.

Az 1, 2, 3, 4 sorszámú parti legyen az 1 sorszámú fordulóban. Az 5, 6, 7, 8 sorszámú parti legyen a 2 sorszámú fordulóban. A 9, 10, 11, 12 sorszámú parti legyen a 3 sorszámú fordulóban….. És így tovább, a q sorszámú parti legyen az r sorszámú fordulóban, ahol r értékét úgy lehet megkapni, hogy venni kell q negyedrészének felső egészrészét. Így például a 217, 218, 219, 220 sorszámú parti az 55 sorszámú fordulóban van. A továbbiakban legyen $X_{P;Q}$ értéke 1, ha a P sorszámú játékos a Q sorszámú partiban részt vesz, és legyen $X_{P;Q}$ értéke 0, ha a P sorszámú játékos a Q sorszámú partiban nem vesz részt. (Ekkor az $\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{Q}}$ egy olyan vektor, amelynek 12 koordinátája van, és ezek között 3 darab 1-es és 9 darab 0-ás szerepel. Az $\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{Q}}$ vektor P-ik koordinátája 1, ha a P sorszámú játékos szerepel a Q-ik partiban, és az $\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{Q}}$ vektor P-ik koordinátája 0, ha a P sorszámú játékos nem szerepel a Q-ik partiban.) Ekkor a következő megállapítások teljesülnek:

Egy fordulóban minden játékos játszik valamelyik ugyanazon fordulóbeli partiban, ezért ha $Q1$, $Q2$, $Q3$, $Q4$ egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik, akkor a következő egyenletnek kell teljesülnie, ahol $P\in\{1; 2;..; 11; 12\}$.

#1 $\quad X_{P;Q1}+X_{P;Q2}+X_{P;Q3}+X_{P;Q4}=1$

Ez 12*55=660 darab elsőfokú egyenletet jelent.

Egy fordulóban minden játékos pontosan egy partiban vesz részt, azaz egy fordulóban nincs olyan játékos, aki 2 partiban vesz részt. Ezért, ha Q_A, Q_B egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik, akkor a következő egyenleteknek kell teljesülnie, ahol $P\in\{1; 2;..; 11; 12\}$.

#2 $\quad X_{P;QA}*X_{P;QB}=0$

Ez 55*6*12=3960 darab másodfokú egyenletet jelent. Ugyanis 55 forduló van, és minden fordulóban 4 parti van, így minden fordulóban 6 olyan két partiból álló pár van, amelynek legfeljebb egyik partijában vesz részt a P sorszámú játékos.

(A #2 egyenleteket úgy is meglehetett volna fogalmazni, hogy az $\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{QA}}$ vektor és az $\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{QB}}$ vektor skaláris szorzata 0, ha Q_A, Q_B egymástól különböző sorszámokat 4-gyel elosztva, majd a kapott eredmények felső egészrészét véve ugyanaz az r érték adódik.)

A 12 játékos közül bármely 3 játékos összekerülhet pontosan egy partiban, így összesen 220 parti van. Ezért így bármely játékos pontosan 55=kombináció(11;2) darab partiban vehet részt. Így a következő egyenleteknek kell teljesülnie, ahol $P\in\{1; 2;..; 11; 12\}$.

#3 $$\sum_{Q=1}^{220} X_{P;Q}=55$$

Ez 12 darab egyenletet jelent. (Ez a 12 darab egyenlet következik az #1 egyenletből.)

Továbbá így nincs két egyforma összetételű parti, azaz nincs két olyan parti, amelynek ugyanaz a három játékos a résztvevője. Így bármely két partit kiválasztva, a kiválasztott partiknak legfeljebb 2 közös résztvevője lehet. Ezért a következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie, ahol Q_A és Q_B két, egymástól különböző tetszőlegesen kiválasztott parti sorszáma, $P \in \{1; 2;..; 11; 12\}$.

#2 $X_{P;QA} * X_{P;QB} < 3$

Ez nagyon sok másodfokú egyenlőtlenséget jelent.

Összegezve van tehát nagyon sok X változó, amelyeknek értéke 0 vagy 1 lehet csak, és van nagyon sok egyenlet és egyenlőtlenség, amelyeknek teljesülnie kell. Az ezeknek a feltételeknek megfelelő megoldásból leolvasható egy ilyen bajnokság menetrendje. Azonban ez a módszer csak elvileg jó, gyakorlatilag szinte kivitelezhetetlen. Gráfelméleti módszerekkel illetve backtrack algoritmust használó algoritmust használó program segítségével hamarabb található ilyen menetrend.

Zárszó gyanánt: Talán sikerült érdekes és elgondolkoztató problémákat felvetni dolgozatomban. Magam részéről igyekszem ezeket a problémákkal szabadidőmben tovább foglalkozni, és számítógépes programokkal megoldást találni.

Bertalan Zoltán.
e-mail.: marcius.08@freemail.hu