Vegyes feladatok számelméletből

Készítette: Baloghné Cseh Judit, Szolnok, Varga Katalin Gimnázium

Az idei vándorgyűlésen elhangzott előadások közül egyértelműen Freud Róbert előadása hatott rám legerősebben. Az egyetemi évek emlékére ezért lefordítottam néhány számelmélet feladatot angolról magyarra. Ezek némelyikét Schultz János már publikálta, illetve továbbképzési anyagként terjesztette, az angol nyelvű forrást is tőle kaptam. A feladatok a középiskolás korosztály számára alkalmasak gyakorlásra, versenyfelkészülésre.

1., Adott két számtani sorozat: 1,4, ... és 9,16, ... Legyen S az a halmaz, melynek elemei a fenti két sorozat első 2004-2004 tagja. Hány különböző eleme van S-nek?

A legkisebb közös tag a 16. Mivel a differenciák (3 és 7) legkisebb közös többszöröse 21, pontosan azok a számok lesznek tagjai mindkét sorozatnak, amelyek $21k+16$ alakúak (ahol k természetes szám). Az első sorozatnak 6. tagja a 16 és ezután minden 7. tagja lesz közös a második sorozattal. A legnagyobb k, melyre $7k+6\leq 2004$, $k=285$. Így 286 olyan szám van, amelyik közös tagja mindkét sorozatnak. A válasz tehát $4008-286=3722$.

2., Adott egy pozitív egészekből álló, szigorúan monoton növekedő sorozat, amelyben minden tag (az első tag kivételével) többszöröse az őt megelőzőnek. Mi a sorozat 6. tagja, ha tudjuk, hogy az első hat tag összege 79?

Legyenek a tagok $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$. Ha $a_4\geq 12$ lenne, akkor $a_5\geq 2a_4\geq 24$ és $a_6\geq 2a_5\geq 48$ lenne, vagyis $a_4+a_5+a_6\geq 84$, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Tehát $a_4<12$. Csak egyféleképpen tudjuk megadni az első négy számot: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$ és $a_4=8$. Ha $a_5=ma_4=8m$ és $a_6=na_5=8mn$ ($m,n\geq 2$ egészek), akkor azt kapjuk, hogy $8m+8mn=79-(1+2+4+8)=64$, azaz $m(1+n)=8$. Ebből $m=2$ és $n=3$ adódik egyedüli megoldásként. Tehát $a_6=48$.

3., Melyik az a legnagyobb pozitív egész n, amelyre n^3+100 osztható $n+10$-zel?

Polinomosztással kapjuk, hogy $n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900$. Ezért ha $n+10\,|\,n^3+100$, akkor $n+10\,|\,900$. Mivel n maximális értékére vagyunk kíváncsiak és a 900 legnagyobb osztója önmaga, $n+10=900$. Így $n_{max}=890$.

4. a, Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots\frac{n-1}{n}$ törtek közül páros darab nem egyszerűsíthető ($n>2$ egész szám).

b, Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{12n+1}{30n+2}$ kifejezés semmilyen pozitív egész n esetén sem egyszerűsíthető.

a, A $\frac{k}{n}$ tört pontosan akkor nem egyszerűsíthető, ha az $\frac{n-k}{n}$ tört sem egyszerűsíthető, mert (k,n)=(n-k,n). Ha a $\frac{k}{n}$ és $\frac{n-k}{n}$ törtek minden k esetén különbözőek, akkor ezek párba állításával adódik a bizonyítandó állítás. Ha $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$ valamely k-ra, akkor n=2k, azaz $\frac{k}{n} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ egyszerűsíthető volt, innen a feladat visszavezethető az előző esetre.

b, Vegyük észre, hogy (30n+2, 12n+1)=(6n,12n+1)=(6n,1)=1; tehát a fenti tört számlálója és nevezője bármely pozitív egész n esetén relatív prím egymáshoz.

5., Egy kocka lapjaira pozitív egész számokat írtunk. Minden csúcshoz hozzárendeljük az őt határoló lapokra írt számok szorzatát. Ha a csúcsokhoz hozzárendelt számokat összeadjuk, 1001-et kapunk. Mennyi a kocka lapjaira írt számok összege?

Jelöljük a kocka lapjaira írt számokat a,b,c,d,e,f betűkkel úgy, hogy a-f, b-d, illetve c-e legyenek szemközt egymással. Tudjuk, hogy 1001=abc+abe+acd+ade+bcf+bef+cdf+def=(a+f)(b+d)(c+e). (A szorzattá alakításban segíthet, hogy az xyz szorzat akkor fordul elő, ha x-y, y-z és x-z páronként nem szemközti lapokon vannak.) Mivel 1001=7·11·13 és a+f, b+d és c+e mindegyike 1-nél nagyobb, a három szemközti lappárra az összegek épp 7, 11 és 13. Tehát a+b+c+d+e+f=7+11+13=31.

6., Nevezzünk egy számot prímszerűnek, ha összetett ugyan, de nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem pedig 5-tel. A három legkisebb prímszerű szám a 49, 77 és 91. Összesen 168 darab 1000-nél kisebb prímszám van. Hány darab 1000-nél kisebb prímszerű szám van?

Az 1000-nél kisebb számok közül $\left\lfloor\frac{999}{2}\right\rfloor = 499$ darab osztható 2-vel, $\left\lfloor\frac{999}{3}\right\rfloor = 333$ darab osztható 3-mal és $\left\lfloor\frac{999}{5}\right\rfloor = 199$ darab osztható 5-tel. Összesen $\left\lfloor\frac{999}{6}\right\rfloor = 166$ olyan van, ami 6 többszöröse, $\left\lfloor\frac{999}{10}\right\rfloor = 99$, ami 10 többszöröse és $\left\lfloor\frac{999}{15}\right\rfloor = 66$, ami 15 többszöröse. Végül $\left\lfloor\frac{999}{30}\right\rfloor = 33$ olyan, ami 30 többszöröse. Szita formula alkalmazásával kapjuk, hogy 999-(499+333+199-166-99-66+33)=266 szám lehet prímszerű, mert a 2,3,5 számok egyikével sem osztható. De ezek között 165 prím van és az 1 is szerepel köztük (ami se nem prím, se nem összetett). Vagyis éppen 100 darab 1000-nél kisebb prímszerű szám van.

7., Adott egy $k>1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy p prím és létezik pozitív egészek szigorúan növekvő sorozata $(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ úgy, hogy $p+ka_1$, $p+ka_2,\dots,p+ka_n,\dots$ mind prímek.

Skatulyaelvet használunk véges-végtelen vonatkozásban. Jelölje P_i azon prímek halmazát, melyek kongruensek i-vel modulo k ($i=1,2,\dots,k-1$). Az összes prím (esetleg ha k prím, akkor a k kivételével) pontosan egy halmazban szerepel $P_1, P_2,\dots, P_{k-1}$ közül. Mivel végtelen sok prím van, legalább egy halmaznak végtelen sok eleme van, legyen ez például P_i. Ennek elemei $p=x_1<x_2<\dots<x_n<\dots$ növekvő sorrendben. Legyen $a_n = \frac{x_{n+1}-p}{k}$ minden pozitív egész n-re. Ekkor $p+ka_n$ végigfut P_i elemein x_2-től kezdve. Az a_n számok pozitív egészek és így megkaptuk a keresett p prímet és az $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ sorozatot.

8., Minden n pozitív egész számra jelölje p(n) az n szám 0-tól különböző számjegyeinek szorzatát. (Ha n egyjegyű, akkor p(n)=n). Legyen $S=p(1)+p(2)+\dots+p(999)$. Mi az S szám legnagyobb prímosztója?

Tekintsük úgy, mintha minden 1000-nél kisebb szám háromjegyű lenne, az egy- és kétjegyűeket egészítsük ki a megfelelő darabszámú 0-val. Ezen számokra a számjegyek szorzatainak összege $(0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot1+\dots+9\cdot9\cdot9)-0\cdot0\cdot0=(0+1+\dots+9)^3-0$. Azonban p(n) a 0-tól különböző számjegyek szorzatát jelenti. Ezért a fenti kifejezésben szereplő 0-kat cseréljük ki 1-ekre, hiszen a 0-k figyelmen kívül hagyása a szorzatban 1-gyel való szorzásnak felelhet meg. Tehát a fenti kifejezésben kivonandó 0 is 1 lesz, ami kompenzálja a $0\cdot0\cdot0$-ból keletkező $1\cdot1\cdot1$-et. Így $S=46^3-1=(46-1)(46^2+46+1)=3^3\cdot5\cdot7\cdot103$, aminek legnagyobb prímosztója 103.

9., Legyenek m és n pozitív egészek úgy, hogy $[m,n]+(m,n)=m+n$. Bizonyítsuk be, hogy a fenti két szám közül az egyik osztója a másiknak.

<u>1. megoldás</u>: Legyen $d=(m,n)$. Így $m=ad$ és $n=bd$. Ekkor $(a,b)=1$ és $[m,n]=\frac{mn}{(m,n)}=abd$. A megadott egyenlet átírható az $abd+d=ad+bd$ alakba, vagy d-vel leosztva és átrendezve: $ab-a-b+1=0$. Ebből $(a-1)(b-1)=0$, vagyis $a=1$ vagy $b=1$. Ez azt jelenti, hogy vagy $m=d$ és $n=bd=bm$, vagy $n=d$ és $m=an$.

<u>2. megoldás</u>: (Viète-formulák) Mivel $[m,n]\cdot(m,n)=mn$ és $[m,n]+(m,n)=m+n$, $[m,n]$ és (m,n) gyökei az $x^2-(m+n)x+mn=0$ másodfokú egyenletnek, akárcsak m és n. Ezért $[m,n]$ és (m,n) éppen m-mel és n-nel egyeznek meg valamilyen sorrendben, amiből adódik a bizonyítandó állítás.

10., Legyen $n=2^{31}\cdot3^{19}$. Hány olyan n-nél kisebb pozitív egész osztója van n^2-nek, ami nem osztója n-nek?

1. megoldás: Legyen $n=p^rq^s$, ahol p és q különböző prímek. Ekkor $n^2=p^{2r}q^{2s}$, vagyis n^2-nek (2r+1)(2s+1) darab osztója van. Minden n-nél kisebb osztónak van egy n-nél nagyobb osztópárja. Tehát n^2-nek $\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2}$=2rs+r+s darab n-nél kisebb osztója van (itt azért vontunk ki 1-et, mert az n is osztó, de ennek osztópárja önmaga). Mivel n-nek (r+1)(s+1) darab osztója van (beleértve magát az n-t is) és mivel n minden osztója egyúttal osztója n^2-nek is, összesen 2rs+r+s-[(r+1)(s+1)-1]=rs olyan osztója van n^2-nek, ami n-nél kisebb, de nem osztója n-nek. Ha r=31 és s=19, akkor rs=589 ilyen osztó létezik.

2. megoldás: Az n^2 valamely d osztója kisebb n-nél, de nem osztója n-nek akkor és csak akkor, ha $d=\begin{cases}2^{31+a}\cdot 3^{19-b}, ha\ 2^a<3^b\\ 2^{31-a}\cdot 3^{19+b}, ha\ 2^a>3^b\end{cases}$, ahol 1≤a≤31 és 1≤b≤19 egészek. Mivel $2^a \neq 3^b$ minden pozitív egész a-ra és b-re, összesen 19·31=589 ilyen osztó van.

11., Mutassuk meg, hogy (36a+b)(a+36b) semmilyen pozitív egész a és b számok esetén sem kettőhatvány.

Írjuk fel a-t és b-t a következő alakban: $a=2^c\cdot p,\ b=2^d\cdot q$, ahol p és q páratlan számok. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy c≥d. Így 36a+b=$36\cdot 2^c\cdot p+2^d\cdot q=2^d(36\cdot 2^{c-d}\cdot p+q)$. Következésképpen $(36a+b)\cdot(36b+a)=2^d(36\cdot 2^{c-d}\cdot p+q)(36b+a)$, amelynek 1-től különböző páratlan osztója $36\cdot 2^{c-d}\cdot p+q$, így ez a szám nem lehet kettőhatvány.

12., Határozzuk meg a 2007, 2008, ...,4012 pozitív egész számok legnagyobb páratlan osztóinak összegét!

Jelölje p(n) az n pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját. Ekkor $n=2^k\cdot p(n)$, ahol a k természetes számot jelöl. Ha n_1 és n_2 olyanok, hogy $p(n_1)=p(n_2)$, akkor közülük az egyik legalább kétszer akkora, mint a másik. Ez viszont azt jelenti, hogy p(2007), p(2008),..., p(4012) páronként különböző páratlan számok. Mivel összesen 2006 darab számról van szó, így ezek pontosan a { 1,3,...,4011} halmaz elemei. Így a keresett összeg $1+3+...+4011=2006^2$.

13., Határozzuk meg azon $\frac{a}{b}$ alakú törtek összegét, ahol a és b a 27000 egymáshoz relatív prím osztói.

Mivel $27000=2^3\cdot 3^3\cdot 5^3$, minden $\frac{a}{b}$ alakú tört felírható $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$ alakban, ahol a, b, c a [-3,3] intervallumbeli egészek. Minden egyes megfelelő tört pontosan egyszer szerepel a $(2^{-3}+2^{-2}+\cdots+2^3)(3^{-3}+3^{-2}+\cdots+3^3)(5^{-3}+5^{-2}+\cdots+5^3)$

kifejezésben, ha felbontjuk a zárójeleket. Tehát a keresett összeg $\frac{1}{2^3\cdot3^3\cdot5^3}\cdot\frac{2^7-1}{2-1}\cdot\frac{3^7-1}{3-1}\cdot\frac{5^7-1}{5-1}=\frac{(2^7-1)(3^7-1)(5^7-1)}{2^6\cdot3^3\cdot5^3}$.

14. a, Hány olyan pozitív egészekből álló rendezett (a,b,c) számhármas létezik, hogy [a,b]=1000, [b,c]=2000 és [c,a]=2000?

b, Legyenek a,b és c egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{[a,b,c]^2}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}$.

a, Mivel az 1000 és a 2000 is felírható $2^m\cdot5^n$ alakban, az a, b és c számokat is ilyen alakban keressük. Legyen $a=2^{m_1}\cdot5^{n_1}$, $b=2^{m_2}\cdot5^{n_2}$ és $c=2^{m_3}\cdot5^{n_3}$, ahol m_i és n_i természetes számok. Ekkor a következő egyenlőségeknek kell teljesülnie:

(*) $\max\{m_1,m_2\}=3$, $\max\{m_2,m_3\}=4$ és $\max\{m_3,m_1\}=4$, illetve

(**)$\max\{n_1,n_2\}=3$, $\max\{n_2,n_3\}=3$ és $\max\{n_3,n_1\}=3$

(*)-ból kapjuk, hogy $m_3=4$ és vagy m_1, vagy m_2 3 kell legyen, míg a másik a 0,1,2,3 értékek valamelyikét veheti fel. Így hét rendezett számhármast kapunk: (0,3,4);(1,3,4);(2,3,4);(3,0,4),(3,1,4);(3,2,4) és (3,3,4). (**) miatt az n_1,n_2, n_3 közül kettőnek 3 értéket kell felvennie, míg a harmadik a 0,1,2,3 értékek közül kerülhet ki. Így tíz rendezett számhármas adódik: (3,3,0);(3,3,1);(3,3,2);(3,0,3);(3,1,3);(3,2,3);(0,3,3);(1,3,3);(2,3,3) és (3,3,3). Mivel az (m_1,m_2,m_3) és az (n_1,n_2,n_3) számhármasok megválasztása független egymástól, összesen 7·10=70 különböző megoldás van.

b, Legyen $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, $b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ és $c=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\gamma_n}$, ahol p_1, p_2,…,p_n különböző prímek és a kitevők természetes számok. Ekkor

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}=\frac{\prod_{i=1}^n p_i^{2max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}}}{\prod_{i=1}^n p_i^{max\{\alpha_i,\beta_i\}}\cdot\prod_{i=1}^n p_i^{max\{\beta_i,\gamma_i\}}\cdot\prod_{i=1}^n p_i^{max\{\gamma_i,\alpha_i\}}}=$$
$$\prod_{i=1}^n p_i^{2max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-max\{\alpha_i,\beta_i\}-max\{\beta_i,\gamma_i\}-max\{\gamma_i,\alpha_i\}} \text{ és}$$
$$\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}=\frac{\prod_{i=1}^n p_i^{2min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}}}{\prod_{i=1}^n p_i^{min\{\alpha_i,\beta_i\}}\cdot\prod_{i=1}^n p_i^{min\{\beta_i,\gamma_i\}}\cdot\prod_{i=1}^n p_i^{min\{\gamma_i,\alpha_i\}}}=$$
$$\prod_{i=1}^n p_i^{2min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-min\{\alpha_i,\beta_i\}-min\{\beta_i,\gamma_i\}-min\{\gamma_i,\alpha_i\}}$$

Elegendő tehát megmutatni, hogy bármely természetes α, β és γ esetén

$2\max\{\alpha,\beta,\gamma\}-\max\{\alpha,\beta\}-\max\{\beta,\gamma\}-\max\{\gamma,\alpha\}=2\min\{\alpha,\beta,\gamma\}-\min\{\alpha,\beta\}-\min\{\beta,\gamma\}-\min\{\gamma,\alpha\}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Látható, hogy mindkét oldal értéke $-\beta$. Sőt az is kiderült, hogy $\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}$ és $\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2}$ egész számok.

15., Legyenek x, y, z pozitív egészek, melyekre $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Jelöljük h-val az x,y,z számok legnagyobb közös osztóját. Bizonyítsuk be, hogy hxyz és h(y-x) teljes négyzet.

Legyen x=ha, y=hb, z=hc. Ekkor a,b,c egymáshoz relatív prím pozitív egészek, azaz (a,b,c)=1. Jelölje a és b legnagyobb közös osztóját g. Így a=g·a', b=g·b', valamint a' és b' olyan pozitív egészek, melyekre (a',b')=(a'-b',b')=(a',a'-b')=1. Mivel $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c(b-a)=ab \Leftrightarrow c(b'-a')=a'b'g$. Ezért g|c és (a,b,c)=g=1. Így (a,b)=1, valamint (b-a,ab)=1. Tehát b-a=1 és c=ab. Most már látjuk, hogy $hxyz=h^4abc=(h^2ab)^2$ és $h(y-x)=h^2$ valóban teljes négyzetek.

16., Legyen p egy 3k+2 alakú prím, amely osztója az a^2+ab+b^2 kifejezésnek valamely a és b esetén. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mind a, mind pedig b osztható p-vel.

Indirekt módon bizonyítunk. Feltesszük, hogy p nem osztója a-nak. Mivel $p \mid a^2+ab+b^2$, $p \mid a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, így $a^3 \equiv b^3 \pmod p$. Ebből következik, hogy $a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod p$. Ezért (és indirekt feltevésünk miatt) p a b-nek sem osztója. A kis Fermat-tétel értelmében $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, és mivel p=3k+2 alakú, $a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod p$. Mivel (a,p)=1, $a \equiv b \pmod p$. Ezt felhasználva $a^2+ab+b^2 \equiv 0 \pmod p$-ből kapjuk, hogy $3a^2 \equiv 0 \pmod p$. Mivel $p \neq 3$, p|a, ami ellentmond indirekt feltevésünknek.

17., A 27000001-nek pontosan négy prímosztója van. Határozzuk meg ezek összegét!

Mivel $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ és $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, kapjuk, hogy
$27000001=300^3+1=(300+1)(300^2-300+1)=301(300^2+2\cdot 300+1-900)$
$=301\cdot[(300+1)^2-900]=301\cdot(301^2-30^2)=301\cdot 331\cdot 271=7\cdot 43\cdot 271\cdot 331$.
Tehát 7+43+271+331=652 a prímosztók összege.

18., Keressük meg az összes olyan pozitív egész n számot, melyre n!+5 teljes köb.

<u>1.megoldás</u>: Az egyetlen megoldás az n=5. Könnyen ellenőrizhető behelyettesítéssel, hogy n=1,2,3,4,6,7,8,9 esetén n!+5 nem teljes köb, míg n=5 esetében az. Ha n>9 esetén n!+5 teljes köb lenne, akkor (mivel 5-tel osztható számról van szó), 125 többszöröse lenne. Ez azonban nem lehetséges, hiszen n>9 esetén n! valóban 125 többszöröse, de az 5 nem az. Így n>9 értékekre nem kapunk megoldást.

<u>2.megoldás</u>: Ismét helyettesítsük be az n=1,2,...,6 értékeket! Ha $n \geq 7$, akkor $n!+5 \equiv 5 \pmod 7$. Egy köbszám 7-es osztási maradéka azonban csak 0 vagy ±1 lehet.

19., Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre a p^2+11 számnak pontosan hat pozitív osztója van.

Mivel $p^2+11=p^2-1+12=(p+1)(p-1)+12$, így ha $p\geq 5$ prím, akkor $p^2+11>12$ és osztható 12-vel, mert p+1 és p-1 is páros, és valamelyikük osztható 3-mal. Ezért ebben az esetben p^2+11-nek hatnál több pozitív osztója van, hiszen a 12-nek van pontosan hat darab. Ha p=2, akkor $p^2+11=15$, aminek csak négy pozitív osztója van. Tehát egyetlen megoldás lehetséges: p=3, ekkor $p^2+11=20$, aminek pontosan hat pozitív osztója van.

20., Nevezzünk egy számot hetesben duplának, ha a hetes számrendszerben felírt alakja épp a duplája(tízes számrendszerben értelmezve) a tízes számrendszerben felírtnak. Például ilyen szám az 51, mert hetes számrenszerbeli alakja 102. Melyik a legnagyobb ilyen tulajdonsággal rendelkező szám?

Tegyük fel, hogy $a_k \cdot 7^k + a_{k-1} \cdot 7^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0$ egy hetesben dupla szám, ahol $a_k\neq 0$. Másszóval $a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ kétszer akkora, azaz $a_k \cdot (10^k - 2 \cdot 7^k) + a_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 2 \cdot 7^{k-1}) + \cdots + a_1 \cdot (10 - 2 \cdot 7) + a_0(1-2) = 0$. Mivel ebben az egyenletben az a_i számok együtthatói csak i=0 és i=1 esetén negatívak és egyik a_i sem negatív, k értéke legalább 2. Mivel ha i>2, akkor minden a_i együtthatója legalább 314, és mivel egyik a_i sem lehet 6-nál nagyobb (hiszen a hetes számrendszer számjegye), kapjuk, hogy k=2 és $2a_2=4a_1+a_0$. Ahhoz, hogy a lehető legnagyobb ilyen számot kapjuk, először próbálkozzunk $a_2=6$-tal! Ekkor $12=4a_1+a_0$, amiből $a_1=3$ és $a_0=0$ adja az a_1 legnagyobb értékét. Tehát $6\cdot 49+3\cdot 7=315$ a keresett szám.

21., Bizonyítsuk be, hogy ha $a\equiv b \pmod{n}$, akkor $a^n\equiv b^n \pmod{n^2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

$a\equiv b \pmod{n}$-ből $a=b+qn$, ahol q egész szám. Használjuk fel a binomiális tételt!

$a^n - b^n = (b+qn)^n - b^n = \binom{n}{1}b^{n-1}qn + \binom{n}{2}b^{n-2}q^2n^2 + \cdots + \binom{n}{n}q^n n^n = n^2\left(b^{n-1}q + \binom{n}{2}b^{n-2}q^2 + \cdots + \binom{n}{n}q^n n^{n-2}\right)$, ami azt jelenti, hogy $a^n\equiv b^n \pmod{n^2}$.

A megfordítás nem igaz, például $3^4\equiv 1^4 \pmod{4^2}$, de 3 és 1 különböző maradékot adnak 4-gyel osztva.