Legyen K egy Kalmár-feladat

Juhász Péter

ELTE Matematikai Intézet
Számítógéptudományi Tanszék

2013. július 4–5.

A verseny

A verseny

- Komoly hagyomány, az idei volt a 42.

A verseny

- Komoly hagyomány, az idei volt a 42.
- 3–6. osztályban nincs más országos, nem feleletválasztós

A verseny

- Komoly hagyomány, az idei volt a 42.
- 3–6. osztályban nincs más országos, nem feleletválasztós
- Urbán–Reiman páros feladatanyaga

A verseny

- Komoly hagyomány, az idei volt a 42.
- 3–6. osztályban nincs más országos, nem feleletválasztós
- Urbán–Reiman páros feladatanyaga

Mindezek ellenére nem felhőtlen a verseny jövője.

Célok

A versennyel kapcsolatos célok:

Célok

A versennyel kapcsolatos célok:

- Népszerűsítés

Célok

A versennyel kapcsolatos célok:

- Népszerűsítés
- Több diák elérése – 3 forduló

Célok

A versennyel kapcsolatos célok:

- Népszerűsítés
- Több diák elérése – 3 forduló
- A felkészülés segítése a diákok és tanárok számára az online feladatgyűjtemény által

Célok

A versennyel kapcsolatos célok:

- Népszerűsítés
- Több diák elérése – 3 forduló
- A felkészülés segítése a diákok és tanárok számára az online feladatgyűjtemény által
- Szakmai szempontból: a feladatok ne későbbi tananyag ismeretét feltételezzék

Feladatgyűjtemény

Önkéntes munkában készül egy feladatgyűjtemény.
Lehet csatlakozni. (LaTeX, GeoGebra, TikZ)

Feladatgyűjtemény

Önkéntes munkában készül egy feladatgyűjtemény.
Lehet csatlakozni. (LaTeX, GeoGebra, TikZ)

Jelenleg: 2007–12., 5–8. osztály.

Feladatgyűjtemény

Önkéntes munkában készül egy feladatgyűjtemény.
Lehet csatlakozni. (LaTeX, GeoGebra, TikZ)

Jelenleg: 2007–12., 5–8. osztály.

www.cs.elte.hu/~jpet/kalmar/

Feladatgyűjtemény

Önkéntes munkában készül egy feladatgyűjtemény.
Lehet csatlakozni. (LaTeX, GeoGebra, TikZ)

Jelenleg: 2007–12., 5–8. osztály.

www.cs.elte.hu/~jpet/kalmar/

„Szerzők”: Ágoston Tamás, Bóra Eszter, Csorba Péter, Czeller Ildikó, Damásdi Gábor, Erben Péter, Farkas Ádám László, Frankl Nóra, Juhász Péter, Simon Péter.

Feladatgyűjtemény

lehetőségek összeszorzódnak, vagyis $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ ilyen szám létezik. Ha kiválasztunk 3 különböző számjegyet (például 6,4,8), akkor ezeket $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen rakhatjuk sorba ($468, 486, 648, 684, 846, 864$), de ezek közül csak 1 esetben lesz a sorrendjük növekedő. Azaz az 504 számnál minden jó esetet 6-szor számoltunk, a végeredmény $\frac{504}{6} = 84$.

Csökkenő sorrend: Most mind a 10 számjegyet használhatjuk, és az előző eset mintájára most $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ lehetőség van.

Megjegyzés. Az első, majd a második jegy lehetséges értékeit megvizsgálva is megkaphatjuk a megoldást. Például 3-mal kezdődő növekedő háromjegyű szám 15 van, mert a második jegy lehet $4, 5, 6, 7, 8$. A 4-et az $5, 6, 7, 8, 9$ követheti, ami 5 lehetőség. Hasonlóan az 5-öt 4, a 6-ot 3, a 7-et 2, a 8-at 1 féleképpen folytathatjuk. Ez összesen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ lehetőség.

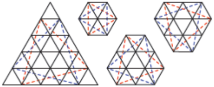
2. **Hány olyan 4-jegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amely nem változik, ha felcseréljük az egyesek és az ezresek helyén álló számjegyét?**

Az egyesek és ezresek helyén álló számjegynek meg kell egyeznie. Elöl nem állhat 0, ezért itt 9-féleképpen választhatunk. Vegyük észre, hogy a százasok és a tízesek helyére bármit tehetünk a 10 számjegy közül. Ezek szerint $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ a megoldás.

3. **Leírjuk egymás mellé sorra 1-től kezdve a pozitív egész számokat: $123456789101112\ldots$ Melyik számjegy áll ebben a sorban a 2012-edik helyen?**

Az egyjegyűek leírásához 9 számjegy kell. 90 darab kétjegyű szám van, ezek leírásához 180 számjegy kell. Ez eddig 189 számjegy. Hiányzik még $2012 - 189 = 1823$ számjegy. Ezek mind egy-egy háromjegyű szám számjegyei lesznek. Az 1823 harmada 607 és marad még 2. A 607-edik háromjegyű szám $99 + 607 = 706$. Tehát a következő szám középső jegyét kellett megkeresnünk. Ez a 707 második jegye, azaz 0.

4. **Egy 5 cm oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 1 cm oldalú kis szabályos háromszögekre bontottunk. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai az így kapott háló rácspontjai közül kerülnek ki?**

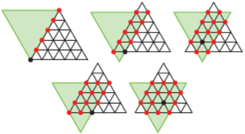


Az oldalak hossza szerint számoljuk le a háromszögeket.
1 cm oldalúból van 25.
2 cm oldalúból 10 + 3 = 13 (3 „fejjel" lefelé).
3 cm oldalúból 6.
4 cm oldalúból 3 darab és 5 cm oldalúból 1.

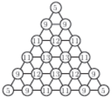
A továbbiakban csak a rácspontokra figyelünk, nem foglalkozunk az őket összekötő szakaszokkal. Keressünk az ábrán olyan hatszögeket, amelyeknek másodszomszédos csúcsait összekötve szintén szabályos háromszöget kapunk. Egységnyi oldalú szabályos hatszög $1 + 2 + 3 = 6$ darab van, mindegyikbe 2-2 különböző szabályos háromszöget írhatunk. Ez újabb 12 db háromszög. Található olyan hatszög is, amelynek oldalai $1, 2, 1, 2, 1, 2$ egységnyi. Ezekből $1 + 2 + 1 = 4$ db van (1 „fejjel" lefelé), tehát 8 újabb háromszöget találtunk. Van még egy $1, 3, 1, 3, 1, 3$ oldalú hatszög is, ebbe újabb 2 szabályos háromszöget lehet rajzolni. Ez összesen $25 + 13 + 6 + 3 + 1 + 12 + 8 + 2 = 70$ szabályos háromszög.

A versenyen nem volt elvárás az utolsó 22 háromszög megtalálása.

Második megoldás. A hálónak vegyük egy rácspontját (fekete pontokkal jelöltük az ábrákon). Hány olyan szabályos rács-háromszög van, aminek ez a csúcsa? Ha egy ilyen szabályos háromszöget elforgatunk $60°$ fokkal, akkor az egyik csúcsa átfordul a másikba. Az egész háló $60°$ fokos elforgatottjának (zöld az ábrákon) és az eredeti hálónak a metszésrácspontjai (piros pontok az ábrákon) száma pont megadja a keresett szabályos háromszögek számát.



Ezt kell összeszámolnunk a háló minden rácspontjára. A következő ábrán a rácspontokba írt számok mutatják, hogy hány szabályos háromszögnek csúcsa az a rácspont. (Gondoljuk meg, hogy a szimmetria miatt az előbbi öt ábra elég ehhez!)



Az ábrán látható számok összege pont a keresett szabályos háromszögek számának háromszorosát adja, mivel minden háromszöget minden csúcsánál megszámoltunk. Tehát a megoldás $\frac{3 \cdot 5 + 6 \cdot 9 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 13}{3} = 70$.

Gondolkodás

Feladatok

Feladatok gondolkodásra 1.

1. **(2007-m6-2)** Egy kocka csúcsaihoz írjuk oda az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat úgy, hogy a kocka bármelyik lapjának négy csúcsához írt számok összege ugyanannyi legyen, mint a szemközti lap négy csúcsához írt számok összege.

Feladatok gondolkodásra 1.

1. **(2007-m6-2)** Egy kocka csúcsaihoz írjuk oda az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat úgy, hogy a kocka bármelyik lapjának négy csúcsához írt számok összege ugyanannyi legyen, mint a szemközti lap négy csúcsához írt számok összege.
2. Egy zár kódja egy egyjegyű szám $(0, 1, \ldots, 9)$. Egy erre alkalmas billentyűzeten lehet megadni a kódot. Ha rossz kódot adunk meg, akkor növekszik a kód 1-gyel modulo 10. Ha másodszor megnyomjuk ugyanazt a számot és nem nyílik ki a zár, akkor sajnos felrobban. Ki lehet-e nyitni a zárat?

Feladatok gondolkodásra 1.

1. **(2007-m6-2)** Egy kocka csúcsaihoz írjuk oda az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat úgy, hogy a kocka bármelyik lapjának négy csúcsához írt számok összege ugyanannyi legyen, mint a szemközti lap négy csúcsához írt számok összege.
2. Egy zár kódja egy egyjegyű szám $(0, 1, \ldots, 9)$. Egy erre alkalmas billentyűzeten lehet megadni a kódot. Ha rossz kódot adunk meg, akkor növekszik a kód 1-gyel modulo 10. Ha másodszor megnyomjuk ugyanazt a számot és nem nyílik ki a zár, akkor sajnos felrobban. Ki lehet-e nyitni a zárat?
3. Azt mondjuk, hogy a 8, 9 szomszédos számokból álló számpár **érdekes**, mert $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, azaz mindkét szám prímtényezői legalább második hatványon szerepelnek. Keress még legalább egy ilyen érdekes számpárt!

Feladatok gondolkodásra 1.

4. Kétszemélyes játék. Egy 17-szög átlóit húzzuk be felváltva. Nem lehet olyan átlót behúzni, ami belül metszene egy már behúzott átlót. Az veszt, aki nem tud lépni. Mi a nyerő stratégia?

Feladatok gondolkodásra 1.

4. Kétszemélyes játék. Egy 17-szög átlóit húzzuk be felváltva. Nem lehet olyan átlót behúzni, ami belül metszene egy már behúzott átlót. Az veszt, aki nem tud lépni. Mi a nyerő stratégia?
5. (**2012-d71-5**) Egy tetszőleges háromszöget daraboljunk fel négy egyenlőszárú háromszögre.

Feladatok röviden

1. Kocka csúcsaiban az $1, 2, \ldots, 8$ számok. Két szemköztes lap csúcsaiban a számok összege legyen egyenlő.
2. Robbanó zár.
3. Van-e a 8, 9-en kívül még érdekes számpár?
4. Átlóbehúzó játék.
5. Háromszög feldarabolása 4 egyenlőszárú háromszögre.

Megoldások 1.

1. Vegyük először észre, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36.$$

Megoldások 1.

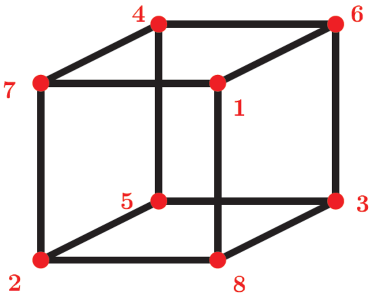
1. Vegyük először észre, hogy
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36.$$
Mivel két szemköztes oldal esetén mind a 8 csúcs egyszer fog szerepelni az összegben, így minden oldalon a 4 csúcsba írt számok összege 18.

Megoldások 1.

1. Vegyük először észre, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36.$$

Mivel két szemköztes oldal esetén mind a 8 csúcs egyszer fog szerepelni az összegben, így minden oldalon a 4 csúcsba írt számok összege 18.



Megoldások 1.

2. Egy jó sorozat: 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 4

Megoldások 1.

2. Egy jó sorozat: **0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 4**

0	2	4	6	8	1	3	5	7	4

Megoldások 1.

2. Egy jó sorozat: **0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 4**

0	2	4	6	8	1	3	5	7	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Megoldások 1.

2. Egy jó sorozat: **0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 4**

0	2	4	6	8	1	3	5	7	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	6	7	8	9	5

Megoldások 1.

3 • Keressünk egy ilyen számpárt $(x^2 - 1, x^2)$ alakban!

Megoldások 1.

3.
- Keressünk egy ilyen számpárt (x^2-1, x^2) alakban!
- Elég azzal foglalkoznunk, hogy x^2-1 eleget tegyen a feltételnek.

Megoldások 1.

3.
- Keressünk egy ilyen számpárt (x^2-1, x^2) alakban!
- Elég azzal foglalkoznunk, hogy x^2-1 eleget tegyen a feltételnek.
- Alakítsunk szorzattá: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Foglalkozzunk csak páratlan x-ekkel: ekkor $x-1$ és $x+1$ is páros, tehát a 2 kitevőjével már nem kell törődnünk, mert az már legalább 2 lesz.

Megoldások 1.

3.
- Keressünk egy ilyen számpárt (x^2-1, x^2) alakban!
- Elég azzal foglalkoznunk, hogy x^2-1 eleget tegyen a feltételnek.
- Alakítsunk szorzattá: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Foglalkozzunk csak páratlan x-ekkel: ekkor $x-1$ és $x+1$ is páros, tehát a 2 kitevőjével már nem kell törődnünk, mert az már legalább 2 lesz.
- Keressünk páratlan x-et úgy, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ is olyanok legyenek, hogy minden prím kitevője legalább második hatványon szerepel. Ez pont azt jelenti, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ számpár érdekes, mert a különbségük 1.

Megoldások 1.

3.
- Keressünk egy ilyen számpárt (x^2-1, x^2) alakban!
- Elég azzal foglalkoznunk, hogy x^2-1 eleget tegyen a feltételnek.
- Alakítsunk szorzattá: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Foglalkozzunk csak páratlan x-ekkel: ekkor $x-1$ és $x+1$ is páros, tehát a 2 kitevőjével már nem kell törődnünk, mert az már legalább 2 lesz.
- Keressünk páratlan x-et úgy, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ is olyanok legyenek, hogy minden prím kitevője legalább második hatványon szerepel. Ez pont azt jelenti, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ számpár érdekes, mert a különbségük 1.
- De egy ilyet már ismerünk: $(8, 9)$, ezt használva tehát megválaszthatjuk jól x-et ($x=17$), és így kapjuk a $(288, 289)$ érdekes számpárt.

Megoldások 1.

4. Átlóbehúzó játék.

Megoldások 1.

4. Átlóbehúzó játék.
   Csak a kezdő eldöntése lényeges, onnantól nem kell gondolkozni.

Megoldások 1.

4. Átlóbehúzó játék.
   Csak a kezdő eldöntése lényeges, onnantól nem kell gondolkozni.
   Triangulálás, fix a háromszögek, így az átlók száma is.

Megoldások 1.

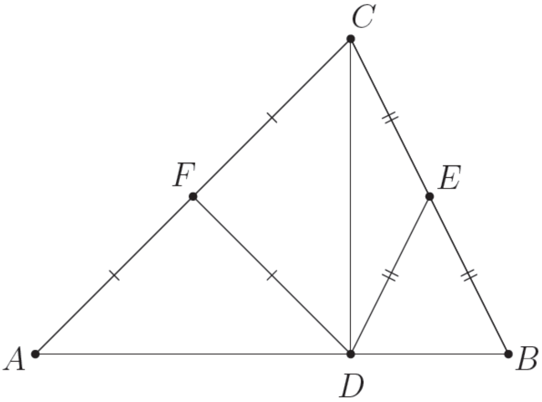
4. Átlóbehúzó játék.
   Csak a kezdő eldöntése lényeges, onnantól nem kell gondolkozni.
   Triangulálás, fix a háromszögek, így az átlók száma is.
   Megfontolandó, hogy először páros sokszögre adja fel az ember.

Megoldások 1.

4. Átlóbehúzó játék.
   Csak a kezdő eldöntése lényeges, onnantól nem kell gondolkozni.
   Triangulálás, fix a háromszögek, így az átlók száma is.
   Megfontolandó, hogy először páros sokszögre adja fel az ember.
   Mert akkor egy „főátlót” behúzva működik a tükrözéses stratégia.

Megoldások 1.

5. Háromszög felbontása 4 egyenlőszárúra.



Feladatok gondolkodásra 2.

1. A kocka éleire írjuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat. Tekintsük minden csúcsban az oda befutó éleken lévő számok összegét. Számozzuk meg az éleket így, hogy minden csúcsban ez az összeg azonos legyen.

Feladatok gondolkodásra 2.

1. A kocka éleire írjuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat. Tekintsük minden csúcsban az oda befutó éleken lévő számok összegét. Számozzuk meg az éleket úgy, hogy minden csúcsban ez az összeg azonos legyen.
2. Robbanó zár. Mi a helyzet akkor, ha kétszer egyik számmal sem lehet próbálkozni?

Feladatok gondolkodásra 2.

1. A kocka éleire írjuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat. Tekintsük minden csúcsban az oda befutó éleken lévő számok összegét. Számozzuk meg az éleket így, hogy minden csúcsban ez az összeg azonos legyen.
2. Robbanó zár. Mi a helyzet akkor, ha kétszer egyik számmal sem lehet próbálkozni?
3. Legfeljebb hány szomszédos ilyen tulajdonságú szám lehet?

Feladatok gondolkodásra 2.

1. A kocka éleire írjuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat. Tekintsük minden csúcsban az oda befutó éleken lévő számok összegét. Számozzuk meg az éleket így, hogy minden csúcsban ez az összeg azonos legyen.
2. Robbanó zár. Mi a helyzet akkor, ha kétszer egyik számmal sem lehet próbálkozni?
3. Legfeljebb hány szomszédos ilyen tulajdonságú szám lehet?
4. Egy 6×6-os táblázat mezőit fokozatosan egyenként zöldre festjük. Ha egy mezőt befestettünk, akkor beleírjuk azt a számot, ami megmutatja, hány vele oldalban szomszédos mező van már befestve. Hogyan kell befesteni a mezőket, hogy az összes mező befestése után a 36 szám összege a lehető
   a) legnagyobb b) legkisebb legyen?

Feladatok gondolkodásra 2.

1. A kocka éleire írjuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat. Tekintsük minden csúcsban az oda befutó éleken lévő számok összegét. Számozzuk meg az éleket így, hogy minden csúcsban ez az összeg azonos legyen.
2. Robbanó zár. Mi a helyzet akkor, ha kétszer egyik számmal sem lehet próbálkozni?
3. Legfeljebb hány szomszédos ilyen tulajdonságú szám lehet?
4. Egy 6×6-os táblázat mezőit fokozatosan egyenként zöldre festjük. Ha egy mezőt befestettünk, akkor beleírjuk azt a számot, ami megmutatja, hány vele oldalban szomszédos mező van már befestve. Hogyan kell befesteni a mezőket, hogy az összes mező befestése után a 36 szám összege a lehető
   a) legnagyobb   b) legkisebb legyen?
5. **(2012-d82-2)** Szabályos háromszöget daraboljunk fel 5 egyenlőszárú háromszögre.

Megoldások 2.

1. Lehetetlen, hiszen a számok összege 78, ami nem osztható 8-cal.

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni.

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni. Nézzük az előbbi táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni. Nézzük az előbbi táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni. Nézzük az előbbi táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni. Nézzük az előbbi táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}

$\sum a_i \equiv 5 \pmod{10}$,

Megoldások 2.

2. A zárat nem lehet minden esetben kinyitni. Nézzük az előbbi táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}

$\sum a_i \equiv 5 \pmod{10}$, $\sum b_i \equiv 5 \pmod{10}$.

Megoldások 2.

3. 4 szomszédos nem lehet.

Megoldások 2.

3. 4 szomszédos nem lehet.
   Lenne köztük egy $4k+2$ alakú.

Megoldások 2.

3. 4 szomszédos nem lehet.
   Lenne köztük egy $4k+2$ alakú.
   Lehet-e 3?

Megoldások 2.

3. 4 szomszédos nem lehet.
   Lenne köztük egy $4k+2$ alakú.
   Lehet-e 3?
   Megoldatlan, Erdős sejtése 1975-ből, hogy nem lehet 3 szomszédos sem.

Megoldások 2.

4. Mindegy, hogy hogyan színezünk, az összeg mindig 60.

Megoldások 2.

4. Mindegy, hogy hogyan színezünk, az összeg mindig 60.
   - Tekintsünk két szomszédos mezőt. Ezek közül annál, amelyiket később festjük be eggyel fogja növelni a ráírt számot az a tény, hogy a másik már be van festve.

Megoldások 2.

4. Mindegy, hogy hogyan színezünk, az összeg mindig 60.
    - Tekintsünk két szomszédos mezőt. Ezek közül annál, amelyiket később festjük be eggyel fogja növelni a ráírt számot az a tény, hogy a másik már be van festve.
    - Vagyis minden kis határoló szakasz 1-et ad a teljes összegbe.

Megoldások 2.

4. Mindegy, hogy hogyan színezünk, az összeg mindig 60.
   - Tekintsünk két szomszédos mezőt. Ezek közül annál, amelyiket később festjük be eggyel fogja növelni a ráírt számot az a tény, hogy a másik már be van festve.
   - Vagyis minden kis határoló szakasz 1-et ad a teljes összegbe.
   - Így ezek darabszáma adja meg a mezőkre írt számok összegét. Pontosan 60 ilyen határoló szakasz van 6×6-os táblázatban

Megoldások 2.

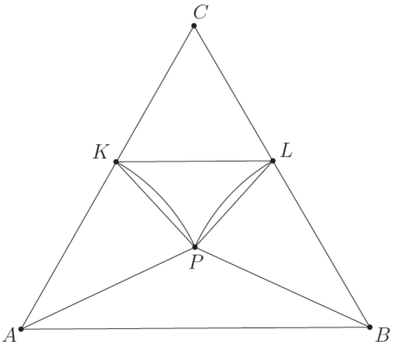
5. A-ból és B-ből rajzoljunk r sugarú kört, ahol

$$\frac{a}{2} < r < a.$$

Megoldások 2.

5. A-ból és B-ből rajzoljunk r sugarú kört, ahol

$$\frac{a}{2} < r < a.$$

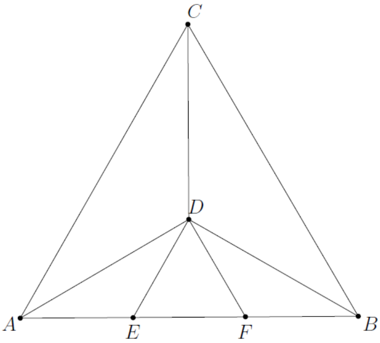


Megoldások 2.

5. Második megoldás.

Megoldások 2.

5. Második megoldás.



Feladatok gondolkodásra 3.

1. Kocka élein az $1, 2, \ldots, 12$ számok. Minden laphoz rendeljük hozzá a 4 határoló élen lévő 4 szám összegét. Legyen ez az összeg minden lapon egyenlő.

Feladatok gondolkodásra 3.

1. Kocka élein az $1, 2, \ldots, 12$ számok. Minden laphoz rendeljük hozzá a 4 határoló élen lévő 4 szám összegét. Legyen ez az összeg minden lapon egyenlő.
2. (**2007-d81-3**) Az $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik!

Feladatok gondolkodásra 3.

1. Kocka élein az $1, 2, \ldots, 12$ számok. Minden laphoz rendeljük hozzá a 4 határoló élen lévő 4 szám összegét. Legyen ez az összeg minden lapon egyenlő.
2. (**2007-d81-3**) Az $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik!
3. Legfeljebb hány szomszédos hatványszám lehet?

Feladatok gondolkodásra 3.

1. Kocka élein az $1, 2, \ldots, 12$ számok. Minden laphoz rendeljük hozzá a 4 határoló élen lévő 4 szám összegét. Legyen ez az összeg minden lapon egyenlő.
2. (**2007-d81-3**) Az $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik!
3. Legfeljebb hány szomszédos hatványszám lehet?
4. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmazt szeretnénk felbontani egyelemű halmazokra. Ha egy $a + b$-elemű halmazt felbontunk egy a és egy b eleműre, akkor azért ab krajcárt kell fizetnünk. Hogy tudjuk a legolcsóbban elérni a célunkat?

Feladatok gondolkodásra 3.

1. Kocka élein az $1, 2, \ldots, 12$ számok. Minden laphoz rendeljük hozzá a 4 határoló élen lévő 4 szám összegét. Legyen ez az összeg minden lapon egyenlő.
2. (**2007-d81-3**) Az $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik!
3. Legfeljebb hány szomszédos hatványszám lehet?
4. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ halmazt szeretnénk felbontani egyelemű halmazokra. Ha egy $a + b$-elemű halmazt felbontunk egy a és egy b eleműre, akkor azért ab krajcárt kell fizetnünk. Hogy tudjuk a legolcsóbban elérni a célunkat?
5. Háromszögek felbontása egyenlőszárúakra. Tudunk-e általánosítani?

Megoldások 3.

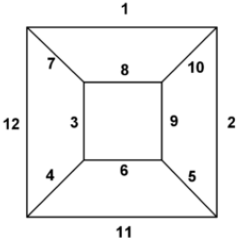
1. Lehetséges.

Megoldások 3.

1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)

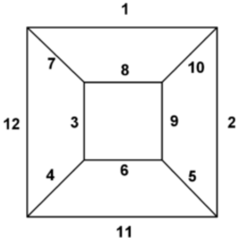
Megoldások 3.

1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)



Megoldások 3.

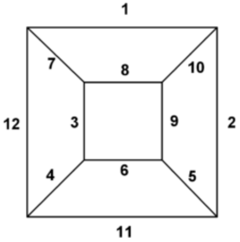
1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)



Ez a felrajzolás sokat segít.

Megoldások 3.

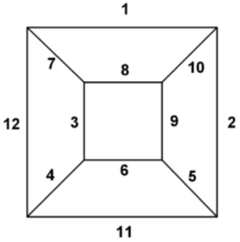
1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)



Ez a felrajzolás sokat segít.

Megoldások 3.

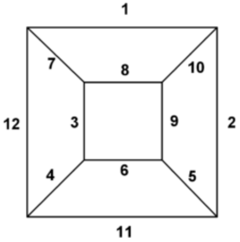
1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)



Ez a felrajzolás sokat segít.
Érdekes informatika feladat: hány lényegében különböző megoldás van?

Megoldások 3.

1. Lehetséges. (Lányoknak lényegesen jobban szokott menni.)



Ez a felrajzolás sokat segít.
Érdekes informatika feladat: hány lényegében különböző megoldás van? (Matematika: ha megvan az összes megoldás, akkor mennyivel kell osztani, hogy a lényegesen különbözőket megkapjuk?)

Megoldások 3.

2. Pont ugyanaz a táblázat és gondolat, ami a nehezített robbanó zárnál szerepelt, megoldja a feladatot.

Megoldások 3.

3. 4 itt sem lehet, pont ugyanazért, amiért az előbb.

Megoldások 3.

3. 4 itt sem lehet, pont ugyanazért, amiért az előbb.
   3 lehet: -1, 0, 1.

Megoldások 3.

3. 4 itt sem lehet, pont ugyanazért, amiért az előbb.
   3 lehet: -1, 0, 1.
   Van-e pozitív 3-as?

Megoldások 3.

3. 4 itt sem lehet, pont ugyanazért, amiért az előbb.
   3 lehet: -1, 0, 1.
   Van-e pozitív 3-as? Nincs.

Megoldások 3.

3. 4 itt sem lehet, pont ugyanazért, amiért az előbb.
   3 lehet: -1, 0, 1.
   Van-e pozitív 3-as? Nincs.
   Sőt, 2-ből is csak a 8, 9.
   Preda Mihăilescu, 2002. (Catalan-sejtés, 1844.)

Megoldások 3.

4. Mindegy, hogy hogyan csináljuk, mindenképpen 4950 egységbe kerül az akció.

Megoldások 3.

4. Mindegy, hogy hogyan csináljuk, mindenképpen 4950 egységbe kerül az akció.

   Általánosan pedig n-elemű halmaznál $\binom{n}{2}$ egység lesz a költség.

Megoldások 3.

4. Mindegy, hogy hogyan csináljuk, mindenképpen 4950 egységbe kerül az akció.
   Általánosan pedig n-elemű halmaznál $\binom{n}{2}$ egység lesz a költség.

   Két bizonyítás:

Megoldások 3.

4. Mindegy, hogy hogyan csináljuk, mindenképpen 4950 egységbe kerül az akció.
   Általánosan pedig n-elemű halmaznál $\binom{n}{2}$ egység lesz a költség.

   Két bizonyítás:
   - „Még teljesebb" indukció.

Megoldások 3.

4. Mindegy, hogy hogyan csináljuk, mindenképpen 4950 egységbe kerül az akció.

   Általánosan pedig n-elemű halmaznál $\binom{n}{2}$ egység lesz a költség.

   Két bizonyítás:

   - „Még teljesebb'' indukció.
   - Teljes gráf.

Megoldások 3.

5. - Ha minden háromszög felbontható 4-re, akkor nyilván minden $3k+1$-re is.

Megoldások 3.

5.
- Ha minden háromszög felbontható 4-re, akkor nyilván minden $3k+1$-re is.
- Ha minden szabályos felbontható 5-re, és a felbontásban van szabályos, akkor nyilván minden $4k+1$-re is.

Megoldások 3.

5.
- Ha minden háromszög felbontható 4-re, akkor nyilván minden $3k+1$-re is.
- Ha minden szabályos felbontható 5-re, és a felbontásban van szabályos, akkor nyilván minden $4k+1$-re is.
- Együtt a kettő mit mond szabályosra?

Megoldások 3.

5.
- Ha minden háromszög felbontható 4-re, akkor nyilván minden $3k+1$-re is.
- Ha minden szabályos felbontható 5-re, és a felbontásban van szabályos, akkor nyilván minden $4k+1$-re is.
- Együtt a kettő mit mond szabályosra?
- Ha egész máshogy csináljuk az indukciót, akkor kijön, hogy minden háromszög felbontható n háromszögre, ha $n \geq 4$.

Feladatok gondolkodásra 4.

3. Milyen hosszú (pozitív differenciájú) számtani sorozat van, ami csupa hatványszámból áll?

Feladatok gondolkodásra 4.

3. Milyen hosszú (pozitív differenciájú) számtani sorozat van, ami csupa hatványszámból áll?
5. Mikor és hogyan lehet felbontani egy háromszöget 1, 2, illetve 3 egyenlőszárú háromszögre?

Feladatok gondolkodásra 4.

3. Milyen hosszú (pozitív differenciájú) számtani sorozat van, ami csupa hatványszámból áll?
5. Mikor és hogyan lehet felbontani egy háromszöget 1, 2, illetve 3 egyenlőszárú háromszögre?
6. Legkevesebb hány hegyesszögű, egyenlőszárú háromszögre lehet felbontani egy négyzetet?

Köszönöm a figyelmet.