Gedeon Veronika – Számadó László

Aki játszik, az egyben gondolkodik is!

A békéscsabai Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott szeminárium rövidített változata

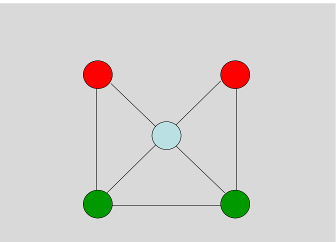
A budapesti Árpád Gimnázium bejáratánál számtalan emléktábla látható, amelyek a múlt legendás tanáraira emlékeztetnek minket. Szentkuthy tanár úr tábláján ez olvasható: Aki gondolkodik, az egyben játszik is. Mi két szót felcseréltünk, és az így kapott gondolatot tűztük ki címként. Szeretnénk megmutatni, hogy a matematikaórákon milyen szórakoztató és hasznos a játék. A továbbiakban az általunk kipróbáltak közül mutatunk néhányat. Ezeket főleg a közösen tanított hetedikeseinkkel, és az ötödikes szakkörösökkel játszottuk.

Az új NAT kiemelten kezeli a gondolkodtató játékokat. Mi biztosak vagyunk abban, hogy az erre fordított idő megtérül. Ezt a felső tagozatos óráinkon, szakkörökön már megtapasztaltuk, és mivel iskolánk hatosztályos, így mindketten bevihettük a gimnázium felsőbb évfolyamaira is ezeket a játékokat. Láthattuk, hogy az idősebb korosztály is nagyon jól bevonható ezekbe a tevékenységekbe.

Számtalan kérdés megfogalmazható ezekkel a játékokkal kapcsolatban, amelyek között komoly matematikai problémák is vannak. Voltak olyan helyzetek, amikor a játékkal kapcsolatos matematikai kérdéseken gondolkodtunk az órákon, de voltak olyan pillanatok is, amikor a matematika adta a játék lehetőségét.
És mindezt nem csak századik órára ajánljuk!

1. Beszorítós

A képen látható táblát kell egy papírra megrajzolnunk ehhez a kétszemélyes játékhoz, és kezdéskor két-két korongot kell elhelyezni rajta. Mi kupakokkal szoktuk játszani. Az egyik játékos a két zöld kupakját a négyzet alsó sarkaiba, a másik játékos a két piros kupakját a két felső, vonallal nem összekötött sarkaiba helyezi.



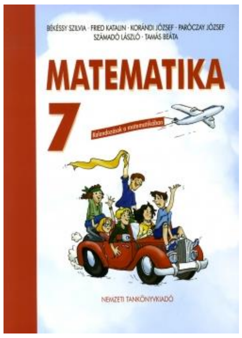
Végiggondolható, hogy a nem szimmetrikus kiindulás nem kedvez egyik játékosnak sem. A bábuk a vonalak mentén tolhatók a szomszédos mezőre. Bármelyik bábuval lehet kezdeni, és felváltva lépnek a játékosok. Az a játékos győz, aki az ellenfelét beszorítja.

A figyelem élénkítésére kiválóan alkalmas ez a játék. Érdemes gyorsan játszatni a gyerekekkel, egyébként unalmassá válhat. Rövid elemzés után látható, hogy nincs nyerő stratégia, a győzelem azon alapszik, hogy melyik félnek lankad a figyelme. Aki ront, vesztett!
Hasonló mintával tovább bővíthető a játék, természetesen a táblának megfelelően növeljük a kupakok számát is. Nagyobb táblán már könnyebb rontani!

A játék elemzése adta a következő egyszerű kérdést (Abacus feladat, 2012. november): Hányféleképpen helyezkedhet el a tábla öt mezőjén két piros és két zöld korong? Az összes eset összeszámolását különösebb kombinatorikai ismeretek nélkül már ötödik osztályban is megtehetik a gyerekek.

2. Pentominó

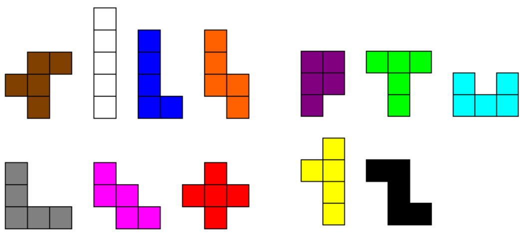
A hetedikeseknél a *Kalandozások a matematikában* tankönyvsorozatot használjuk. A tankönyv fejezetei után rendszeresen megjelenik a *Játszunk a matematikával* rész.



Ezek nem sorszámozott leckék, de mindenkit buzdítunk arra, hogy ezeket ne hagyja ki. A könyvben szereplő játékok további ötleteket is adhatnak, amivel az óráink még változatosabbak és izgalmasabbak lehetnek.
Az egyik ilyen részben megismerkedhetünk a pentominóval. Pentominónak nevezzük azokat a síkbeli alakzatokat, amelyek öt darab egységnyi területű négyzetből építhetők össze. A négyzeteket az éleik mentén illeszthetjük össze!
Könnyebben kezelhető, könnyebben megfogható a játék, ha egyforma kiskockákból építjük fel az alakzatokat.

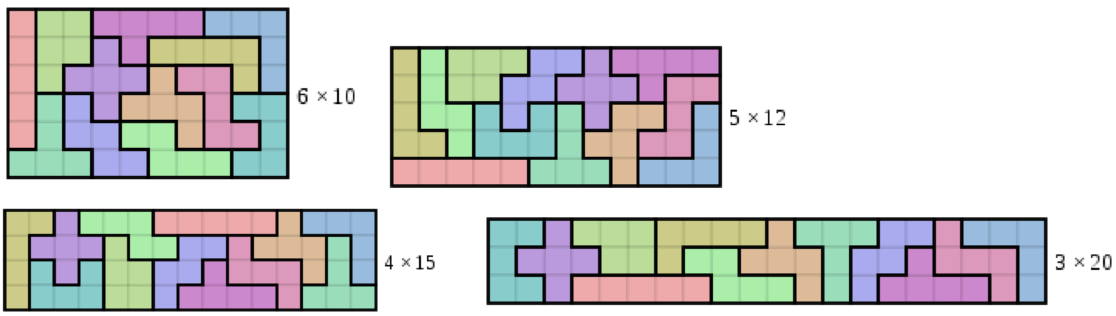
Ezzel kapcsolatban a következő kérdések fogalmazhatók meg:
- Hányféle ilyen alakzat létezik?
- Milyen méretű téglalap fedhető le velük egy rétegben (vagy ha a kockából épített változatra gondolunk, akkor milyen méretű dobozban tudjuk „jól" tárolni a játékot)?

Az egymás mellett elhelyezkedő négyzetek lehetnek az összeszámlálásban a segítségünkre. Így eljuthatunk a válaszhoz, nevezetesen 12 ilyen alakzat létezik.



Ez összesen 60 darab kis négyzet, ezért a második kérdés megválaszolásához a 60 osztópárjaira lesz szükségünk. Nem könnyű a téglalapok kitöltése, mi félkész helyzetet szoktunk mutatni, és a befejezés kigondolása még ekkor is gondolkodtató feladat.

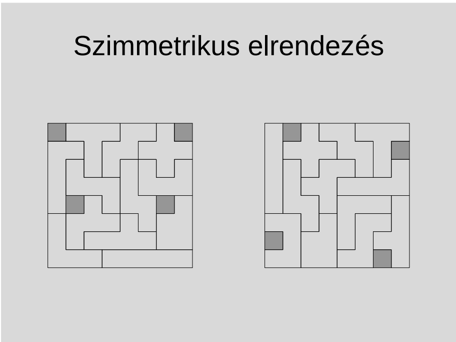
Néhány elrendezést mutat a következő ábra:



A pentominó és a sakktábla add egy jó játéklehetőséget. A játékosok felváltva választanak egy elemet a pentominó készletéből, amelyet a sakktábla szabad mezőire fektetnek. Az elemek nem fedhetik egymást, de oldalaikkal, sarkaikkal érintkezhetnek. Az a játékos nyeri a játékot, aki az utolsó elemet fel tudta rakni a táblára.

Ezzel kapcsolatban érdekes kérdés, hogy vajon minimálisan hány elem tudja lefogni az egész táblát, azaz legkevesebb hány elem kell ahhoz, hogy új elemet már ne tudjunk elhelyezni a táblán.

Szintén érdekességként említjük, hogy a sakktáblára is elhelyezhető a 12 pentominó, de lesz négy szabad mező. Lehet-e ezek elrendezése „szép”? Mutathatnak-e ezek például szimmetrikus formát? Egy tengelyes és egy középpontosan szimmetrikus elrendezést láthatunk a következő ábrán.



3. Nim játékok

A nim kétszemélyes játék, amelyben több kupacban kavicsok vannak (mi ezt is kupakokkal szoktuk játszani) és a játékosok felváltva vesznek el a kupacokból. Kétféle változatban játszható: Vagy az nyer, aki az utolsó kupakot elveszi, vagy az veszít, aki az utolsót elveszi.

Érdemes mindkét változatot kipróbálni, hiszen nagyon eltérő taktikát igényel.

A legegyszerűbb esetben két kupac kupakunk van. Ezeket gyorsan elemezhetik a gyerekek a játék során. Két lehetőségre kell gondolniuk: egyformák vagy nem egyformák a kupacok.

Ennél bonyolultabb a három kupacos változat. A két játékos felváltva vehet el kupakokat, egy kupacból annyit, amennyit szeretne. Akár az összest is. Mi a gyerekekkel leggyakrabban a 3, 5, 7 darabszámú kupaccal játszunk, és azt a változatot, hogy az utolsó kupakot felvevő játékos a vesztes.

A játékkal kapcsolatban nagyon sok anyag található a világhálón, így ezt nem részletezzük.

4. Fordítós

Lerakunk néhány kupakot sorban az asztalra, néhányat rendesen, néhányat fordítva:

Az ábránkon a fehér jelöli a fordítottat. Bármelyik rendesen álló kupakhoz hozzányúlhatunk, de ekkor ezt, és a tőle jobbra lévőket meg kell fordítanunk. Ha például balról a harmadik kupakkal kezdünk, akkor a fordítgatás befejezése után ezt az ábrát kapjuk:

Az a játékos veszt, aki már nem tud fordítani.

A játék kezdetén sok kérdésre keressük a választ.
- Érdemes-e kezdeni?
- Függ-e a kupakok számától, hogy ki kezd?
- Hogyan függ-e az elrendezéstől, hogy van-e a kezdőnek nyerő stratégiája?

Az óráinkon a gyerekek egymással játszanak. Ha valaki úgy érzi, hogy már jól tudja a játékot, akkor kijöhet a tanári asztalhoz. Ekkor mi kirakunk neki egy helyzetet, ő pedig megmondhatja, hogy szeretne-e kezdeni. Ha háromszor egymásután nyer, akkor (és egy kis beszélgetés után) megkaphatja a jutalmat!

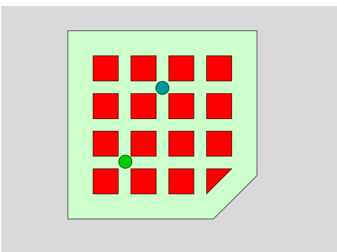
A játék lényegében egy rejtvény. A megoldást nagyon egyszerűen el lehet mondani, de a gyerekeknek sokat kell játszani, figyelni, gondolkodni, mire a megfejtés megfogalmazható. Különösebb előkészületet nem igényel, bármilyen érdeklődésű csoportban játszható.

A *fordítós* játék megoldása:

Az utolsó kupak mindig fordul, így ha én következem (és nyerni szeretnék), akkor az utolsó kupak nem szabad, hogy fordított legyen. Vagyis már a kezdésnél figyelnem kell! Ha az utolsó kupak rendesen áll (az ábránkon piros), akkor kezdenem kell, ha az utolsó kupak fordított (az ábránkon fehér), akkor udvariasan átengedem a kezdést a másik játékosnak.

5. Csendőr és rabló

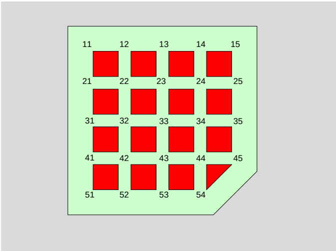
Egy lakótelep térképvázlatát kell megrajzolni, ez lesz a játék táblája. Két útkereszteződésben egy-egy kupakot helyezünk el az ábrán látható módon. A felső a rabló, az alsó a csendőr. A világosabb színű utakon lehet közlekedni, de mindig csak egy szomszédos útkereszteződésbe mehetünk. A rabló kezdi a menekülést. A csendőr feladata, hogy elkapja őt (vagyis rálépjen, arra a kereszteződésre, ahol a rabló tartózkodik). Ez esetben a csendőr nyert. Ha 15 lépéspár alatt a csendőr ezt nem teszi meg, akkor a rabló nyert.



Többszöri próbálkozás után a gyerekek egymás között azt érzik, hogy a rabló van könnyebb helyzetben, mert általában ő nyer. Ilyenkor egyet-egyet játszunk velük csendőrként, és megmutatjuk, hogy hogyan kell csendőrként játszani. Többszöri játék után egyre többen észreveszik a hogyant, az érdeklődők viszont azt is szeretnék tudni, hogy miért?

Mi a csendőr taktikája?

Mindegy, hogy a rabló merre menekül, a csendőr kerülje meg a háromszög alakú házat! Hogy miért? Számozzuk a kereszteződéseket. A kereszteződésben látható kétjegyű szám a sort és az oszlopot jelenti. Például a rabló a 23 jelzésű kereszteződésben kezd (azaz a második sor harmadik oszlopában), a csendőr pedig a 42 jelzésűben.

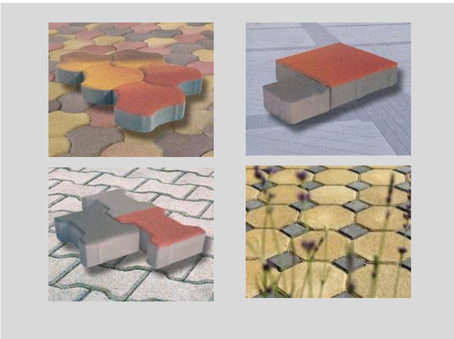


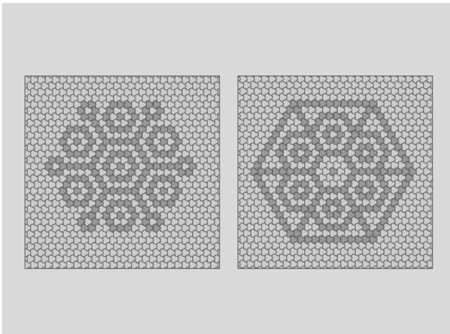
Minden lépésnél az útkereszteződés számában a számjegyek összegének paritása megváltozik. A rabló egy páros összegű kereszteződésbe fog lépni a kezdéskor, a csendőr viszont ezután egy páratlan összegű helyre kerül. Ezért esélytelennek látszik a csendőr helyzete. Ha megkerüli a háromszög alakú házat, akkor viszont nem változtatja a paritást, így valamelyik sarokba beszoríthatja a rablót. Ha a lépésszámot maximalizáltuk, akkor már nem lesz ideje egy okos rablónak, hogy ő is megkerülje a háromszög alakú házat.

Ez a játék is addig izgalmas, ameddig megfejtjük, de a megfejtéshez vezető úton sokat lehet gondolkodni, kísérletezni!

6. Pontos lépés

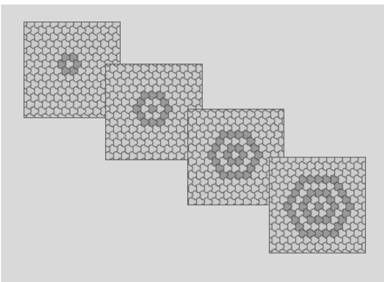
A különböző alakú térkövekkel sokat foglalkozhatunk geometriaórákon. A sík burkolása, a különböző minták szimmetriáinak vizsgálata színesebbé teszi ezeket a témaköröket.





Az első ábrán különböző térköveket mutatunk, a másodikon pedig a szabályos hatszögekkel jó szemléltethető, úgynevezett hullámkövekből kirakható szép mintákat láthatunk.

A szimmetriák tanulmányozása, a sík burkolása mellett akár a sorozatok témakörhöz is eljuthatunk ezekkel a burkolólapokkal.



- Adjuk meg a fenti ábrasorozat további tagjaiban a szürke lapok számát!
- Fogalmazzuk meg az így kapott sorozat képzési szabályát!

Az elejére tegyünk egy szürke lapot, ekkor a következő sorozatot kapjuk:

$$1 \quad 6 \quad 13 \quad 24 \quad 37 \quad 54 \quad 73 \quad 96 \quad 121 \quad \ldots$$

Az ábrák elemzése során eljuthatunk az

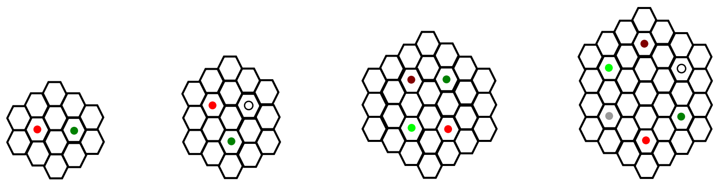
$$a_n = a_{n-2} + 6 \cdot n - 6$$

rekurzív képlethez is.

Egy érdekes játék ötletét is ezek a hatszög lapok adták. A játékot Pontos lépésnek neveztük el. Az Árpád Gimnáziumban évtizedes hagyományai vannak a játékszakkörnek, és az ehhez kapcsolódó társasjáték versenynek. Az elmúlt években ezen a versenyen is szerepelt ez a játék.

Az Amőba játéknak nagyon sok változata ismert, a Pontos lépés is ebbe a családba tartozik. A szabályos hatszöglapokból álló tábla a játék során változik. A játékosoknak négy-négy henger alakú bábujuk van, melynek egyik alaplapjára egy fekete pontot rajzoltunk. (Ez a játék is játszható kupakokkal, hiszen a két alaplapot meg tudjuk különböztetni egymástól.) A játékot két, három, négy, illetve hat fő is játszhatja.

A hatszöglapokat szabályos alakzatban az asztalra rakjuk, majd a megadott helyre felteszünk egy-egy bábut a rajta látható ponttal lefelé fordítva. A táblát és a bábuk elrendezését két, három, négy, illetve hat fő esetén az ábra mutatja.



Ezután kezdődhet a játék! A játékosok egymásután lépnek. Lépésnek számít, ha a játékos

a) feltesz egy saját bábut a táblára a fekete ponttal lefelé fordítva;
b) a táblán lévő saját bábuját áttolja a szomszédos üres hatszöglapra;
c) a táblán lévő saját bábujával átugrik egy szomszédos mezőn álló nem saját bábut, közben a bábuját az átellenes lapjára fordítja.

A b) és a c) esetben azt is megteheti a játékos, hogy egy üres hatszöglapot (amely kevesebb, mint négy oldalával illeszkedik a táblához) áthelyezi a neki megfelelő helyre (ahol kevesebb, mint négy oldallal fog érintkezni a táblával), és a bábujával erre a lapra lép.

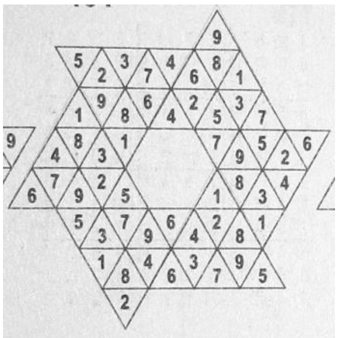
Négy, illetve hat fő esetén az átlósan szemben lévő játékosak együtt játszanak, egy csapatot alkotnak. A bábuk színezése segíti a csapatok felismerését:

1. csapat bábui: Bordó és piros
2. csapat bábui: Sötétzöld és zöld

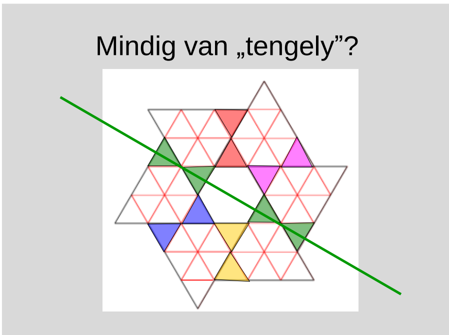
3. csapat bábui: Ezüst és fehér

A játék célja, hogy egymás mellett, egy vonalban, ponttal felfelé legyen három saját bábu, négy, illetve hat fő esetén pedig három azonos csapatbeli játékos bábuja. A győztes lépéssel kerül helyére a harmadik pont. Ez a mindenértelemben „pontos lépés” adja a játék nevét! A további helyezések eldöntéséhez a játék folytatható. Ekkor a győztes (vagy győztes csapat) már nem lép, de bábui a táblán maradnak.

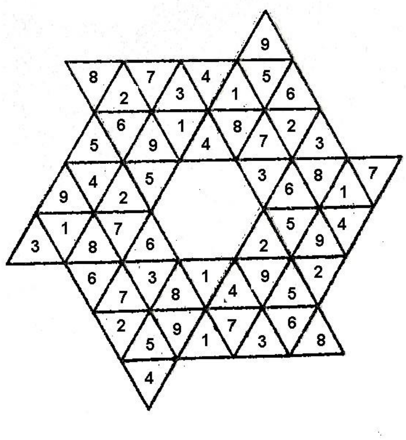
7. Sudoku



Ezek a gondolkodtató rejtvények egyre ismertebbek, egyre elterjedtebbek, de főleg a hagyományos négyzet alakúak. Egyik kirándulásról hazafelé utazáskor egy unatkozó (de okos) gyermek jóvoltából tudjuk megmutatni ezt a nem szokványos alakú sudokut. Több ilyennek a kitöltése után azt vettük észre, hogy a belső üres hatszög oldalain olyan számok láthatók, amelyekhez kifelé csúcsban egy ugyanilyen szám kapcsolódik. Vajon ez csak véletlen?
Sőt! Ezek között mindig látunk négy azonosat, amelyek egy tengelyen voltak. A mellékelt ábrán az 1-es szám ilyen.
Lehet, hogy ez is véletlen?



Tanítványunk a hazaérkezés után biztosan nem unatkozott, mert a következő matematikaórára megválaszolta a kérdéseket. Sikerült igazolnia, hogy a hat egyforma számpárnak minden helyesen kitöltött ábrán ott kell lennie. A második kérdést pedig egy ellenpéldával válaszolta meg:



8. Pislog

A háromszögszámokkal és a négyzetszámokkal változatos helyeken találkozhatunk. Lehetnek egy tankönyv címlapján (biliárdasztal a golyókkal), vagy egy áruház reklámanyagában (teamécsesek).

A figurális számok matematikája is szinte kimeríthetetlen, ezért most nem ezeket az érdekességeket szeretnénk megmutatni. A teamécsesek alakzata adja a következő négyszemélyes játékot. A játékhoz a mécsesek helyett színes golyókat használunk, de az első változatban itt is kupakok szerepeltek.

A játék tartozékai: 1 db tábla (karton papírból is elkészíthető);
8 db piros és 7 db világospiros golyó;
8 db zöld és 7 db világoszöld golyó.

A játékot négyen játsszák, a szemben ülők egy-egy csapatot alkotnak. A játék során a játékosok piramist építenek olyan módon, hogy a golyókat egymásután a táblára helyezik. Az a csapat nyer, aki a piramis csúcsát elfoglalja, ezért a játékosoknak takarékoskodniuk kell a golyókkal. A játékosok piros, zöld, világospiros, világoszöld sorrendben raknak fel egy-egy golyót a táblára. Ha a táblán vagy magasabb szinten kialakul a golyókból egy négyzet, akkor a soron következő játékos a táblán lévő szabad golyójukat is feljebb teheti a négy golyó tetejére. Ilyen módon takarékoskodott a csapatának, mert nem használt el egy új golyót. Nem mozdítható el a táblán az a golyó, amelyiken van egy másik golyó. Az a játékos levehet egy saját csapatához tartozó golyót a tábláról (akár azt is, amit utoljára rakott oda), aki kialakított egy négyszínű négyzetet. A levett golyót színétől függően vagy magához veszi, vagy a

csapattársának adja. Az a játékos két saját szabadon álló golyót levehet a tábláról, aki csapatának színeiből alakított ki egy négyzetet. A levett golyókat a színüktől függően most is vagy magához veszi, vagy a csapattársának adja. Az a játékos három saját szabadon álló golyót levehet a tábláról, aki egy egyszínű négyzetet alakított ki. A levett golyókat a színüktől függően most is vagy magához veszi, vagy a csapattársának adja.
Ha valamelyik játékosnak elfogyott a golyója, akkor a táblán lévő emelést még végrehajthatja. Ha ilyen lehetőség nincs, akkor a következő játékos folytatja a játékot. A játszma az utolsó golyó felhelyezésével ér véget. Ekkor az is eldől, hogy melyik csapat nyerte a játékot.

9. A kocka színezése

A Rubik-kocka és egy közismert matematika feladat adta a következő kérdést. Itt nem játékról van szó, hanem egy játék kapcsán felvetődő problémára keressük a választ.
Tudjuk, hogy egy kockát hat vágással huszonhét kiskockára vághatunk, és ekkor a felszín megháromszorozódik.

A huszonhét kiskocka kiszínezhető-e három színnel úgy, hogy mindhárom színű nagykockát kirakjuk belőle?

Első hallás után azt kellene eldöntenünk, hogy mivel foglalkozzunk: igazoljuk, hogy nem lehet, vagy próbáljunk meg kiszínezni egy készletet.

A mellékelt fényképek azt mutatják, hogy az utóbbi ötlet a célravezető. A színezés elkészítése persze még mindig tartogat egy kis tervezést, gondolkodást.

10. Dobókocka ceruzával és pénzérmével

A játékokhoz nagyon sokszor szükséges a dobókocka. Egyik óra elején azt mondtuk a gyerekeknek, hogy elfelejtettünk hozni, pedig kellene egy. Megkérdeztük, hogy mivel tudnánk helyettesíteni. Rávezetéssel két ötletet fogalmaztunk meg.

Valaki azt mondta, hogy a ceruza hat lapjára rajzoljunk pöttyöket, majd görgessük a ceruzát dobás helyett. Egy másik ötlet alapján rázzunk össze a tenyerünkben öt pénzérmét, majd dobjuk az asztalra. Számoljuk meg az írások számát, a dobás értéke legyen ennél eggyel több.

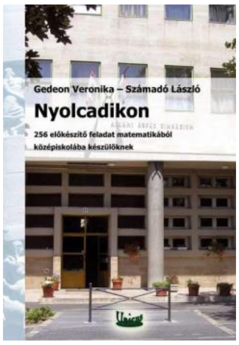
Mind a két módszerrel tudunk véletlenszerűen létrehozni 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékeket, de melyik az, amelyiknek a véletlen értékei jobban hasonlítanak a dobókockával dobott számokhoz?
Vagyis melyik a jobb dobókocka, a ceruza vagy a pénzérme?
A kérdés megválaszolását kísérletezés előzte meg. Voltak, akik a pénzérmés változatot, voltak, akik a ceruzásat próbálták ki. A kapott eredményeket a táblán rögzítettük, összegeztük. Mivel a minták különböző méretűek voltak, ezért láthattuk a relatív gyakoriság alkalmazását is.

A dobókockát mindenki úgy képzeli el, hogy minden lapja egyforma eséllyel jöhet szóba. Vagyis az elméleti meggondolásaink alapján azt szeretnénk inkább dobókockaként kezelni, amelynél az egyformához jobban közelítő értékeket látunk. Erre az első táblázat hasonlít jobban. Ezek szerint a ceruzát jobb dobókockának tartjuk, mint a pénzérméket.

Joggal mondhatjuk, hogy ez a válasz csak ránézésre, az érzéseink alapján született, de amikor nem látszik ennyire, akkor hogyan fogunk dönteni? Ezek a kérdések már túlmutatnak az általános iskola tananyagán.

Utószó

Természetesen ez csak ízelítő az általunk kipróbált ötletekből, de arra biztosan jó, hogy ezeket továbbgondoljuk, és újakkal gyarapítsuk. Az eddig bemutatott könyvek mellett jó szívvel ajánljuk a nyolcadikosoknak írott könyvünket is:



Gedeon Veronika – Számadó László
Nyolcadikon – 256 előkészítő feladat matematikából középiskolába készülőknek.

Játékos ötleteink ebben is megtalálhatók.