Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

Hujter Bálint, Szűcs Gábor

Javított verzió

2013. július 3.

DÜRER VERSENY

Miről lesz szó?

Feladatlapok

- Az első négy feladatot beszéljük meg.
- A többi feladat megoldása:

  `durerinfo.hu/aktualis/ratz-laszlo-2013.html`
- Kérdések.
- Gondolkozni szabad!

Békéscsaba, 2013. július 3. | 53. Rátz László Vándorgyűlés

Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

I.

1. Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?

(II. Dürer Verseny, Döntő, 2009, 7-8. osztályosoknak)

2. Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlenért 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:

1. Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
2. Legalább b pontot el kell érnünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
3. A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c.
4. d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a, b, c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

(VI. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 7-8. osztályosoknak)

3. Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden számjegye közé legfeljebb k számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy megválaszthatjuk k-t úgy, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi a k lehető legkisebb értéke, amellyel ezt még elérhetjük?

(IV. Dürer Verseny, Döntő, 2011, 11-12. osztályosoknak)

4. Le lehet-e fedni egy 2010×2010-es négyzetet, a tetrisből ismert L-betűkkel? És egy 2010×2012-es téglalapot T-betűkkel?

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 11-12. osztályosoknak)

Célok

- A matematika szép.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.
- Alakuljon ki egy közösség.
- Színvonalas szabadidős programok.
- Önkéntes, egyetemista szervezők.

Célok

- A matematika szép.
- Csapatverseny.
- Legyenek lányok.
- Alakuljon ki egy közösség.
- Színvonalas szabadidős programok.
- Önkéntes, egyetemista szervezők.
- Miért Dürer?

Helyszínek, személyek




- Földes Ferenc Gimnázium

Helyszínek, személyek




- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei $\rightarrow$ regionális $\rightarrow$ országos

Helyszínek, személyek

- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei $\rightarrow$ regionális $\rightarrow$ országos
- 6 kategória, 250 résztvevő, 45 szervező

Helyszínek, személyek




- Földes Ferenc Gimnázium
- Farkas Ádám, Szedlák Máté
- megyei $\rightarrow$ regionális $\rightarrow$ országos
- 6 kategória, 250 résztvevő, 45 szervező
- Támogatók:
  MOL, ELMŰ,
  Pro Progressio Alapítvány,
  Bolyai Társulat,
  Abaújterv Bt.

Szervezők – 2013

Szervezők – 2011

Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
- szabadidő
- mentorok
- informatika
- adminisztráció
- pályázatfelelős

Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
- szabadidő
- mentorok
- informatika
- adminisztráció
- pályázatfelelős

Szervezés

Munkacsoportok:

- matek, fizika, kémia
- szabadidő
- mentorok
- informatika
- adminisztráció
- pályázatfelelős

- találkozók: felelősök, mcsoportok, mindenki
  kb. 20 találkozó
- levelezési listák
  kb. 10 különböző lista, kb. 2000 e-mail évente
- Van-e értelme?

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok
- akadályverseny

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit
- előadások

Hogyan néz ki a döntő?

- mentorok
- akadályverseny
- DürerDollár
- licit
- előadások
- visszajelzések

A matekverseny felépítése

A versenyt 4 kategóriában hirdetjük meg:

- A kategória: 5-6. osztályosok (Borsod–Abaúj–Zemplén)
- B kategória: 7-8. osztályosok (+ Heves, Szabolcs–Szatmár–Bereg)
- C kategória: 9-10. osztályosok (országos)
- D kategória: 11-12. osztályosok (országos)

A matekverseny felépítése

A versenyt 4 kategóriában hirdetjük meg:

- A kategória: 5-6. osztályosok (Borsod–Abaúj–Zemplén)
- B kategória: 7-8. osztályosok (+ Heves, Szabolcs–Szatmár–Bereg)
- C kategória: 9-10. osztályosok (országos)
- D kategória: 11-12. osztályosok (országos)

Fordulók:

- Levelező forduló – ősszel
- Döntő a Földesben (Miskolc) – február
  - Péntek: 5 feladat (indoklással leírva) + 1 stratégiás játék
  - Szombat: váltóverseny

Életképek a versenyről

Életképek a versenyről

Életképek a versenyről

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
  ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
  $\rightarrow$ Feladatgyűjtő találkozók

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
  ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
  $\rightarrow$ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
  – egyelőre kevéssé működik, helyette szép versenyfeladatok átalakítása

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
  ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
  $\rightarrow$ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
  – egyelőre kevéssé működik, helyette szép versenyfeladatok átalakítása
- Ha mégis mi találunk ki: általában egyetemen tanulmányaink (kutatásaink) motiválják

Kell száz feladat!

A VI. Dürer versenyen összesen 104 feladatot tűztünk ki.
Honnan lesz ennyi kitűzhető feladat?

- Matematika munkacsoport
  ELTE, BME, CEU matematikus hallgatói
  $\rightarrow$ Feladatgyűjtő találkozók
- Minél több feladatot mi magunk találjunk ki
  – egyelőre kevéssé működik, helyette szép versenyfeladatok átalakítása
- Ha mégis mi találunk ki: általában egyetemen tanulmányaink (kutatásaink) motiválják

Matek mcs. extra "haszna": kapcsolatépítés

Feladatok megbeszélése következik.

1. feladat

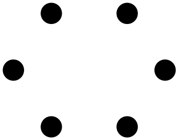
Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?

1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

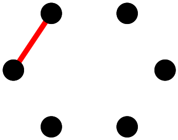
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

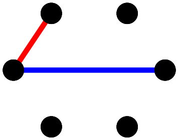
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

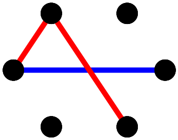
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

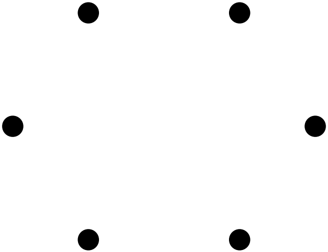
Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?



1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

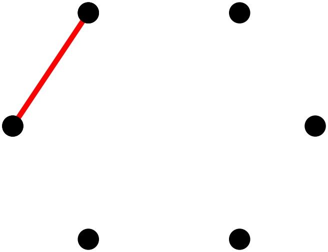


Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

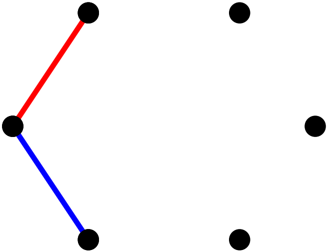


Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

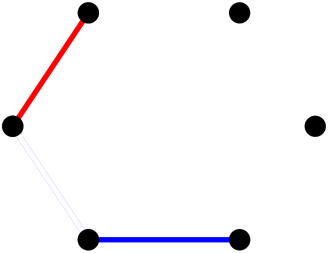
Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.



Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat
A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.



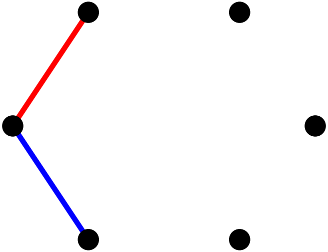
Ezt a két esetet megkülönböztetjük

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

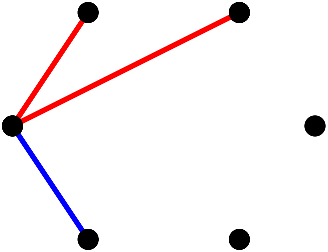


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

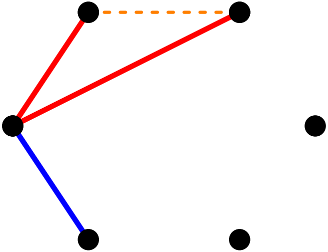


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

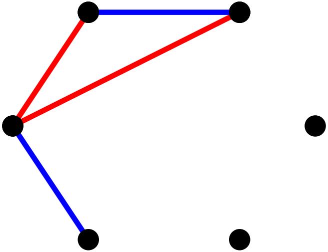


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

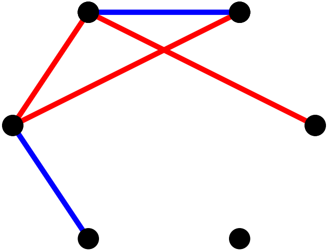
Első eset: az első két behúzott él szomszédos



1. feladat
A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

Első eset: az első két behúzott él szomszédos

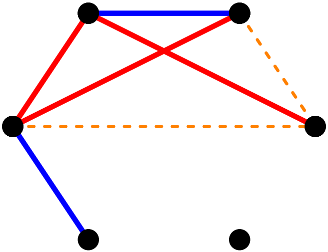


1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Gráfelméleti nyelven beszélünk. Legyen piros a kezdő színe.

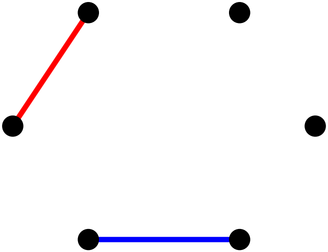
Első eset: az első két behúzott él szomszédos



1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

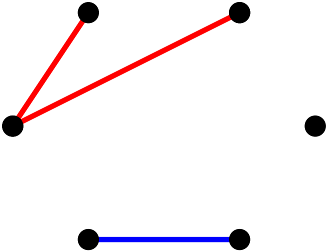


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

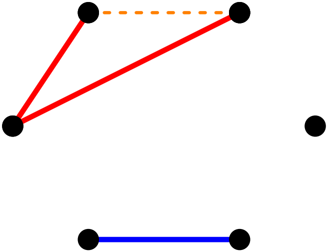


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

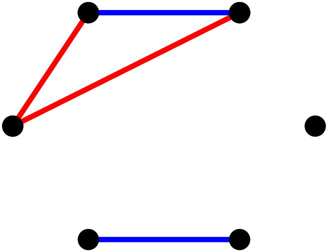


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

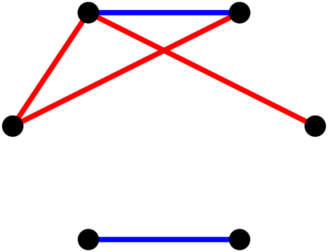


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

Második eset: az első két behúzott él diszjunkt

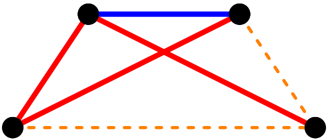


Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

A kezdőnek van nyerő stratégiája

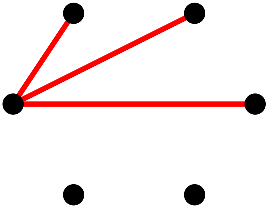
Második eset: az első két behúzott él diszjunkt



Valójában "ugyanaz" a stratégia működik, a második piros él behúzásánál kellett körültekintőbbnek az első esetben.

1. feladat

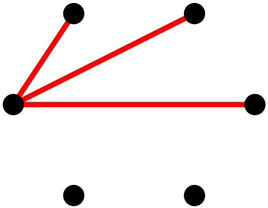
Lehet-e döntetlen? Nem.



1. Vegyünk egy tetszőleges csúcsot.
2. Innen 5 él indul, ezek közt van 3 egyszínű (pl. piros).
3. Ha nincs piros háromszög, akkor a 3 végpont közt csupa kék él megy $\Rightarrow$ együtt egy kék háromszög.

1. feladat

Lehet-e döntetlen? Nem.



1. Vegyünk egy tetszőleges csúcsot.
2. Innen 5 él indul, ezek közt van 3 egyszínű (pl. piros).
3. Ha nincs piros háromszög, akkor a 3 végpont közt csupa kék él megy $\Rightarrow$ együtt egy kék háromszög.

Ez a legegyszerűbb (de már érdekes) kérdése az ún. **Ramsey-elméletnek**, amely a kombinatorika egy klasszikus, de még ma is nagy erőkkel kutatott kérdésköre.

1. feladat – egy érdekes csatlakozó kérdés

Láttuk: előbb-utóbb biztos lesz egyszínű háromszög.

Kérdés (Jenei Dániel)

*Kinek van nyerő stratégiája, ha **az veszít**, aki az első egyszínű háromszöget létrehozza?*

Igazából érdekes lenne: valami jól megfogható, szépen elmondható stratégia (nyitott)

2. feladat

Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlenért 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:

1. Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
2. Legalább b pontot el kell érnünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
3. A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c.
4. d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a, b, c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne).
Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne).
Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

Másrészt 2 ponttal már tovább lehet jutni (szerencsés esetben).

csapat	HUN	POL	CZR	SVK	Gy-D-V	Pont
Magyarország	—	1-0	1-0	1-0	3-0-0	9
Csehország	0-1	—	0-0	0-0	0-2-1	2
Lengyelország	0-1	0-0	—	0-0	0-2-1	2
Szlovákia	0-1	0-0	0-0	—	0-2-1	2

2. feladat

1 ponttal mindenképpen kiesünk, hiszen ehhez legalább 2 meccset el kellett veszítenünk (különben legalább 2 pontunk lenne). Aki legyőzött minket, annak legalább 3 pontja van.

Másrészt 2 ponttal már tovább lehet jutni (szerencsés esetben).

csapat	HUN	POL	CZR	SVK	Gy-D-V	Pont
Magyarország	—	1-0	1-0	1-0	3-0-0	9
Csehország	0-1	—	0-0	0-0	0-2-1	2
Lengyelország	0-1	0-0	—	0-0	0-2-1	2
Szlovákia	0-1	0-0	0-0	—	0-2-1	2

Tehát: $b = 2, d = 1.$

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb $3+1+1=5$ pontunk lenne) Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb 3+1+1=5 pontunk lenne) Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

Másrészt 6 ponttal ki lehet esni (peches esetben):

(Foci VB, 1994, D csoport)

csapat	NIG	BUL	ARG	GRE	Gy-D-V	Pont
Nigéria	—	3-0	1-2	2-0	2-0-1	6
Bulgária	0-3	—	2-0	4-0	2-0-1	6
Argentína	2-1	0-2	—	4-0	2-0-1	6
Görögország	0-2	0-4	0-4	—	0-0-3	0

2. feladat

7 ponttal mindenképpen továbbjutunk, hiszen ehhez legalább 2 győzelem kell (különben legfeljebb 3+1+1=5 pontunk lenne) Akiket legyőztünk, azoknak legfeljebb 6 pontja lehet.

Másrészt 6 ponttal ki lehet esni (peches esetben):

(Foci VB, 1994, D csoport)

csapat	NIG	BUL	ARG	GRE	Gy-D-V	Pont
Nigéria	—	3-0	1-2	2-0	2-0-1	6
Bulgária	0-3	—	2-0	4-0	2-0-1	6
Argentína	2-1	0-2	—	4-0	2-0-1	6
Görögország	0-2	0-4	0-4	—	0-0-3	0

Tehát: $a = 7, c = 6.$

Jó-e ez a megoldás?

A válasz helyes, de az indoklással kapcsolatban fellép egy kétely:

Jó-e ez a megoldás?

A válasz helyes, de az indoklással kapcsolatban fellép egy kétely: megmutattuk, hogy 6 ponttal *ki lehet esni*,
azaz 6 ponttal *nem lehetünk biztos továbbjutók*.
De miért nem lehetséges – bármilyen furcsán hangzik is – hogy 5 ponttal biztos továbbjutunk?
Mielőtt valaki legyintene e képtelen felvetésre...

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

Állítás

8 ponttal biztosan továbbjutunk, ***de*** *9 ponttal ki lehet esni.*

2. feladat módosítás

...változtassuk kicsit a feltételeken:

- 4 csapatból az első 3 jut tovább
- Győzelemért 4, döntetlenért 3, vereségért 0 pont.

Állítás

*8 ponttal biztosan továbbjutunk, **de** 9 ponttal ki lehet esni.*

Az eredeti feltételekkel szerencsére ez az anomália nem fordulhat elő, de a bizonyításban körültekintőbbnek kell lennünk.

A bizonyítás rendezése

Meg kell mutatni, hogy:

- Minden ≥ 7 lehetséges pontszámmal biztosan továbbjutunk.
- $6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ ponttal egyaránt ki lehet esni (példák).
- $2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ ponttal egyaránt tovább lehet jutni* (példák).
- 0 és 1 ponttal is biztosan kiesünk.

*8 pontot pedig nem is lehet szerezni.

4. feladat

Le lehet-e fedni egy 2010×2010-es négyzetet, a tetrisből ismert L-betűkkel?

És egy 2010×2012-es téglalapot T-betűkkel?

Általánosabban

Melyek azok a téglalapok, amelyeket lefedhetünk a tetrisből ismert L-betűkkel?

Melyek azok a téglalapok, amelyeket lefedhetünk a tetrisből ismert T-betűkkel?

4. feladat
L-betűk

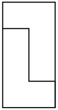
Kezdjük két egyszerű megfigyeléssel.

Állítás

Ha egy téglalapot le tudunk fedni L-betűkkel, akkor a téglalap területe osztható 4-gyel.

Állítás

Egy 2×4 *-es téglalap lefedhető L-betűkkel.*



4. feladat
L-betűk

Mit tudunk eddig?

4. feladat
L-betűk

Mit tudunk eddig?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	×	×	?	?	?	...
2y	×	?	+	+	+	...
4z	?	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

4. feladat
L-betűk

Mit tudunk eddig?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	×	×	?	?	?	...
2y	×	?	+	+	+	...
4z	?	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

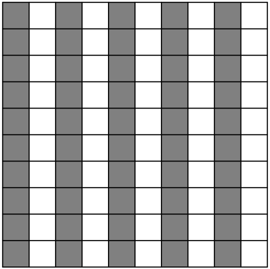
Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L-betűkkel?
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L-betűkkel?

4. feladat

L-betűk

Ötlet: **színezés**



- "fehér" dominók (3 fehér, 1 fekete)
- "fekete" dominók (1 fehér, 3 fekete)
- összesen ugyanannyi fehér és fekete mező van $\rightarrow$
- ugyanannyi "fehér" és "fekete" dominó van $\rightarrow$
- a téglalap területe osztható 8-cal

4. feladat
L-betűk

Mit tudunk most?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	+	+	+	...
4z	x	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L-betűkkel? **NEM**
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L-betűkkel?

4. feladat
L-betűk

Mit tudunk most?

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	+	+	+	...
4z	x	+	+	+	+	...
8v	?	+	+	+	+	...
16w	?	+	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Kérdések:

- Lefedhető-e egy $4k$ területű téglalap L-betűkkel? **NEM**
- Lefedhető-e egy páratlan oldalú téglalap L-betűkkel? **IGEN**

4. feladat

L-betűk

Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \ldots$ téglalapokat le tudjuk fedni:

4. feladat

L-betűk

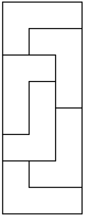
Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.

Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \ldots$ téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

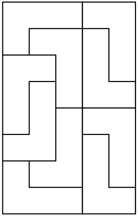
4. feladat
L-betűk

Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.
Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \ldots$ téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

5×8

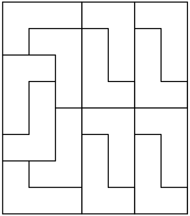
4. feladat
L-betűk

Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.
Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \ldots$ téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

5×8

7×8

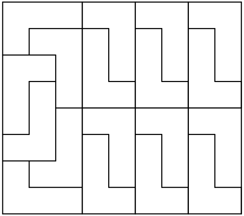
4. feladat
L-betűk

Az előzőek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Pontosan akkor fedhetünk le egy téglalapot L-betűkkel, ha a téglalap területe osztható 8-cal (és egyik oldala sem 1).

Bizonyítás.
Elég megmutatni, hogy a $3 \times 8, 5 \times 8, 7 \times 8, \ldots$ téglalapokat le tudjuk fedni:



3×8

5×8

7×8

9×8

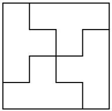
4. feladat
T-betűk

Mi a helyzet T-betűk esetén?

4. feladat
T-betűk

Mi a helyzet T-betűk esetén?

Egyszerűen fedhetünk egy 4×4-es négyzetet:

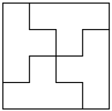


Tehát minden $4k \times 4l$-es négyzetet le tudunk fedni.

4. feladat
T-betűk

Mi a helyzet T-betűk esetén?

Egyszerűen fedhetünk egy $4 \times$ 4-es négyzetet:



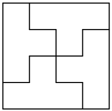
Tehát minden $4k \times 4l$-es négyzetet le tudunk fedni.

Mit tudunk a másik irányból?

4. feladat
T-betűk

Mi a helyzet T-betűk esetén?

Egyszerűen fedhetünk egy 4×4-es négyzetet:



Tehát minden $4k \times 4l$-es négyzetet le tudunk fedni.

Mit tudunk a másik irányból?

- A színezés most is segít. Az előző gondolatmenetet alkalmazhatjuk, sakktábla színezésre.
- Ezért egy T-betűvel fedhető téglalap területe osztható 8-cal.

4. feladat
T-betűk

Összefoglalva

4. feladat
T-betűk

Összefoglalva

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	x	x	x	?	?	...
2y	x	x	?	?	?	...
4z	x	?	+	+	+	...
8v	?	?	+	+	+	...
16w	?	?	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

4. feladat
T-betűk

Összefoglalva

	a	2b	4c	8d	16e	...
x	×	×	×	?	?	...
2y	×	×	?	?	?	...
4z	×	?	+	+	+	...
8v	?	?	+	+	+	...
16w	?	?	+	+	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- Radnai András kérdése
- 2 évig gondolkoztunk
- a válasz ismert (Walkup, 1965)

3.0. feladat

Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé **pontosan** 1 számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy a fenti művelet segítségével egy irracionális számot nem lehet racionálissá tenni.

3.0. feladat
Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé **pontosan** 1 számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy a fenti művelet segítségével egy irracionális számot nem lehet racionálissá tenni.

3. feladat
Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé legfeljebb k számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy megválaszthatjuk k-t úgy, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi a k lehető legkisebb értéke, amellyel ezt még elérhetjük?

3.0. feladat

Legyen egy irracionális szám az

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Szúrjunk minden jegye közé egy-egy számjegyet:

$$a' = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

3.0. feladat

Legyen egy irracionális szám az

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Szúrjunk minden jegye közé egy-egy számjegyet:

$$a' = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$$

Tfh a' racionális. Ekkor olyan $2k$ hosszú szakasz, ami ismétlődik. Ekkor az ismétlődő részben minden x-re teljesül, hogy

$$a_x = a_{x+k} \quad \textbf{és} \quad b_x = b_{x+k}.$$

Ekkor a-ban k-as periódust kaptunk. Ellentmondás.

3. feladat

Meglepő, hogy tudunk rá válaszolni. Legyen $k = 18$. Ekkor tetszőleges számot racionálissá tehetünk, sőt!

$$a = 0,3709345829\ldots.$$

Szúrjunk be jegyeket az alábbi módon:

$$a' = 0,0123456789|0123456789|0123456789|0123456789\ldots$$

Jobban meggondolva elég 9 jegyet beszúrnunk.

$$a'' = 0,0123456789012345678901234567 8\ldots$$

3. feladat

Mi a helyzet $k = 8$-ra?

3. feladat

Mi a helyzet $k = 8$-ra?

Ez nehezebb. Néhány próbálkozás után az a sejtésünk, hogy 8 nem elég.

Bizonyítás.

A bizonyítás konstruktívan indul. Legyen

$$a = 0,012\ldots 90011\ldots 99000111\ldots 99900001111\ldots.$$

Állítás

A fenti **a** *számhoz nem elég* 8 *jegy beszúrása.*

3. feladat

Bizonyítás.
Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \dots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k. Nézzünk b-ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

3. feladat

Bizonyítás.
Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \ldots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k. Nézzünk b-ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?

3. feladat

Bizonyítás.

Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \ldots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k. Nézzünk b-ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?
- A kettesek száma a periódusban legalább $\frac{k}{9}$.

3. feladat

Bizonyítás.
Indirekten okoskodunk. Legyen

$$b = 0, a_1 b_1 b_2 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 a_3 b_{10} b_{11} b_{12} a_4 a_5 \ldots$$

Tfh b racionális. Legyen a periódusa k. Nézzünk b-ben egy olyan k hosszú részt, ami már ismétlődik, és minden piros jegye 2-es.

- Miért van ilyen?
- A kettesek száma a periódusban legalább $\frac{k}{9}$.
- A számjegyek száma a periódusban legalább $10\frac{k}{9} > k$.

Ellentmondás!

3. feladat

- Általában d alapú számrendszerben $d-1$ jegy beszúrása szükséges.
- Nevezzük **d-kritikus számnak** az olyan számokat, amelyek racionálissá tételéhez d-es számrendszerben $d-1$ számjegy szükséges.

3. feladat

- Általában d alapú számrendszerben $d-1$ jegy beszúrása szükséges.
- Nevezzük **d-kritikus számnak** az olyan számokat, amelyek racionálissá tételéhez d-es számrendszerben $d-1$ számjegy szükséges.
- Van-e olyan szám, ami minden számrendszerben kritikus?

Köszönjük a figyelmet!