Válogatás a Dürer Verseny feladataiból

I.

1. Kupido és Ámor a következő játékkal ütik el az időt: 6 ember közül felváltva kettőt-kettőt egymásba habarítanak. Az a nyertes, aki először létrehoz a saját szerelmeiből egy szerelmi háromszöget. A szerelem kölcsönös, a szerelmi háromszög három olyan emberből áll, akik közül bármely kettő szerelmes egymásba. Bújjatok Kupidó vagy Ámor bőrébe, és játszatok a felügyelőkkel!

Lehetséges-e, hogy a játékban döntetlen, azaz bármely két ember szerelmes egymásba, de sem Kupidó, sem Ámor nem nyert?

(II. Dürer Verseny, Döntő, 2009, 7-8. osztályosoknak)

2. Az iskolai focibajnokság egy csoportjában 4 csapat van. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszik. Győzelemért 3, vereségért 0, döntetlenért 1 pont jár. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat jut döntőbe (pontegyenlőség esetén pénzfeldobással döntenek). Az egyik csapat edzője a bajnokság megkezdése előtt a következőket írta a táblára:

1. Ha legalább a pontot elérünk, biztosan továbbjutunk.
2. Legalább b pontot el kell érnünk, hogy legyen esélyünk továbbjutni.
3. A legmagasabb pontszám, amivel kieshetünk: c.
4. d a legmagasabb pontszám, amivel biztosan kiesünk.

Mennyi a, b, c és d értéke, ha az edző nem hibázott?

(VI. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 7-8. osztályosoknak)

3. Adott egy tízes számrendszerbeli irracionális szám tizedestört alakban. Ezt a számot úgy változtathatjuk meg, hogy minden szomszédos számjegypárja közé legfeljebb k új számjegyet szúrhatunk be. Igazoljuk, hogy megválaszthatjuk k-t úgy, hogy a fenti művelet segítségével minden irracionális számot racionálissá tehetünk. Mi a k lehető legkisebb értéke, amellyel ezt még elérhetjük?

(IV. Dürer Verseny, Döntő, 2011, 11-12. osztályosoknak)

4. Le lehet-e fedni egy 2010×2010-es négyzetet, a tetrisből ismert L-betűkkel? És egy 2010×2012-es téglalapot T-betűkkel?

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 11-12. osztályosoknak)

II.

5. Dürer összes vagyona 10 velencei dukát. Tudja, hogy a firenzei pénzváltóban 3 dukátért cserébe adnak 4 firenzei aranyforintot, a velencei pénzváltóban pedig 3 aranyforintért adnak 2 dukátot. Elérheti-e Dürer, hogy legalább 100 dukátja legyen?

(VI. Dürer Verseny, Döntő, 2013, 11-12. osztályosoknak)

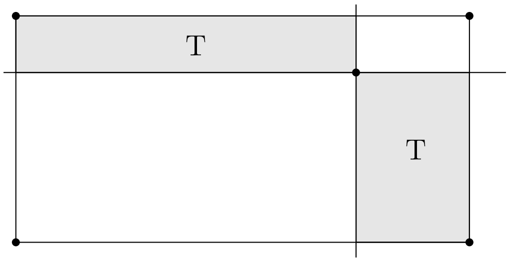
6. Niki, Viktória és Győző játszanak. Felváltva lépnek, egy lépésben 1-et vagy 2-t adnak hozzá az aktuális számhoz. A játék 0-ról indul, a játékot Niki kezdi, és utána Viktória, Győző, Niki, stb. sorrendben folytatják. Az nyer, akinél az összeg éppen 100 lesz. A második helyezett pedig a győztes után sorban következő személy lesz (például, ha Győző nyer, akkor Niki a második és Viki a harmadik). Ki nyer, ha mindenki a lehető legjobb stratégiával játszik, és a lehető legjobb helyezésre törekszik?

(III. Dürer Verseny, Levelező, 2010, 7-8. osztályosoknak)

7. Egy táblázatban, amelynek 3 sora és n oszlopa van, véletlenszerűen elhelyeztünk n fehér, n piros és n fekete korongot. Soron belül a korongokat átrendezhetjük. Igazoljuk, hogy ekkor mindig elérhető, hogy minden oszlopban 3 különböző színű korong legyen.

(III. Dürer Verseny, Döntő, 2010, 9-10. osztályosoknak)

8. Adott egy 2010×1340 méretű rácstéglalap. Egy rácspontot *igazságosnak* nevezünk, hogyha a rajta átmenő 2 tengelypárhuzamos egyenes a nagy téglalap bal felső és jobb alsó sarkából egyenlő területű téglalapot vág le (egy ilyen pont látható az ábrán). Hány *igazságos* rácspont van a téglalap belsejében?



(IV. Dürer Verseny, Levelező, 2011, 9-10. osztályosoknak)

9. Egy 5×5-ös négyzetrács minden mezőjében van egy-egy izzó. Minden egyes lámpa kapcsolásakor a 4 oldalszomszédja megváltoztatja az állapotát, de saját maga nem. El lehet-e érni, hogy minden lámpa égjen, ha kezdetben mindegyik le volt kapcsolva?

(III. Dürer Verseny, Levelező, 2010, 7-8. osztályosoknak)

Megoldások

Az előadáson el nem hangzott megoldások, csatlakozó kérdések, megjegyzések elérhetőek a következő honlapon: `http://durerinfo.hu/aktualis/ratz-laszlo-2013.html`