Tanárverseny – 2011

középiskolában tanító tanároknak

BOLYAI TÁRSULAT

A verseny támogatói:

Typotex Kiadó **Maxim Kiadó** **MATEGYE Alapítvány**

A verseny időtartama 90 perc. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont jár; válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pontot adunk. A versenyen íróeszközön, papíron, körzőn és vonalzón kívül semmilyen más segédeszköz nem használható. A verseny befejeztével csak a kódlapot kell beadni.

---

1. Ha *x*. *y* és $y-\frac{1}{x}$ egyike sem nulla, akkor mennyi $\frac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}$ értéke?

(A) 1 (B) $\frac{x}{y}$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $xy-\frac{1}{xy}$

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

2. Mennyi a $\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$ kifejezés értéke?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ (D) 2 (E) $\sqrt{7}-1$

3. Ha $a+\frac{1}{a}=3$, akkor mennyi $\left|a-\frac{1}{a}\right|$ értéke?

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1,5 (D) 2 (E) $\sqrt[3]{3}$

4. $\frac{2011^2+2009}{2010}=?$

(A) 2009 (B) 2010 (C) 2011 (D) 2012 (E) 2013

5. Ha $6x+7y=121$, $7x+6y=201$, akkor mennyi $x+y$ értéke?

(A) 248 (B) 249 (C) 250 (D) 251 (E) 252

6. Mennyi $\sqrt{x^2-y^2}$ értéke, ha $x+y+\sqrt{x+y}=72$ és $x-y-\sqrt{x-y}=30$?

(A) 24 (B) 30 (C) 48 (D) 72
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

7. $a_1=7,\ a_{n+1}=\sqrt{|a_n^2-16|}$, ahol *n* pozitív egész szám. $a_{80}=?$

(A) 1 (B) 7 (C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{17}$ (E) $\sqrt{33}$

8. Ha *x* és *y* valós számok, akkor mennyi $|1000-x|+|x-y|+|y-2011|$ legkisebb értéke?

(A) 1000 (B) 1011 (C) 2011 (D) 3011 (E) 4022

9. Hány megoldása van az $|x-1|\cdot|x+2|=|x+1|\cdot|x-2|$ egyenletnek a valós számok körében?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. Hány gyöke van az $x^{x+2}=x^5$ egyenletnek a valós számok körében?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Mennyi az $x^2+y^2+x-y+xy+2$ kifejezés legkisebb értéke?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

12. Mennyi az $x^2-4x+1=0$ egyenlet gyökei köbének összege?

(A) 48 (B) 52 (C) 56 (D) 60 (E) 64

13. $\log_6 10 \cdot \lg \sqrt[10]{216}=?$

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{3}{10}$ (D) $-\frac{10}{3}$
(E) Az előző válaszok egyike sem helyes.

14. Hány olyan *n* pozitív egész szám van, amelyre n^3+2n^2+9n+8 értéke köbszám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
(E) végtelen sok

15. Hány olyan pozitív egészekből álló (*x*; *y*) rendezett számpár van, amelyre $x^2-y^2=275$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. Mennyi az 1591 prímosztóinak összege?

(A) 70 (B) 80 (C) 90 (D) 100 (E) 110

17. Milyen számjegy áll abban a legkisebb 99-cel osztható pozitív egész számban második számjegyként, melynek minden számjegye páros?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

18. Jelölje p_i az *i*-edik prímszámot. Hány olyan pozitív egész *n* és *k* számpár van, amelyre

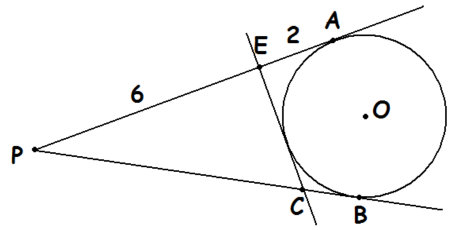
$$\prod_{i=1}^{n} p_i = k^2 - 1$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) Végtelen sok.

19. Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14 és 15 egység. Mekkora a háromszög területe?

(A) 80 (B) 82 (C) 84 (D) 86 (E) 88

20. Az *O* középpontú kör érintői a *PA*, *PB* és *EC* egyenesek. Ha $PE = 6$, $EA = 2$, akkor mekkora a *PEC* háromszög kerülete?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

21. Egy számot nevezzünk páratlan kitevőjűnek, ha prímtényezős felbontásában minden kitevő páratlan. Ilyenek például $13 = 13$, $54 = 2 \cdot 3^3$. Legtöbb hány egymást követő páratlan kitevőjű számot lehet megadni?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Legtöbb hány egymást követő számot lehet úgy megadni, hogy ne legyen közöttük $a^2 \cdot b$ alakú szám, ahol $(a,b) = 1$ és $a > 1$?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

23. Egy számtani sorozatban az első tíz elem összege 100, az első száz elem összege 10. Mennyi az első száztíz elem összege?

(A) –100 (B) 90 (C) 110 (D) –90 (E) –110

24. Az *ABCD* húrtrapéz *D*-ből induló magasságának talppontja az *AB* alapon *M*. Tudjuk, hogy $AM=4$, $MB=9$ és $ADB\angle=90^\circ$. Mekkora a trapéz területe?

(A) 42 (B) 48 (C) 54 (D) 60 (E) 66

25. Mi az $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok körében?

(A) $\frac{1}{2}<x<1$ (B) $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$

(C) $x>1$ (D) $0<x<1$

(E) $\frac{1}{2}<x$

26. Az *x, y* valós számokra

$$\left.\begin{aligned} y-x&\le 5\\ y+4x&\le -5\\ 3y+2x&\ge -5\end{aligned}\right\}$$

teljesül. Mekkora x^2+y^2 legnagyobb értéke?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

27. Melyik az a legkisebb *n* pozitív egész szám, amelyre n^n nem osztója 2010!-nak?

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

28. Hány olyan rendezett $\{a,b,c,d\}$ számnégyes van, melyre $b<a$, $b<c$, $d<c$, ahol *a, b, c, d* különböző pozitív egyjegyű számok?

(A) 126 (B) 378 (C) 630 (D) 882 (E) 1134

29. Az $\{1,2,3,4,\ldots,100\}$ halmaznak kiválasztottuk két részhalmazát, *A*-t és *B*-t úgy, hogy $|A|=|B|$ és $|A\cap B|=0$, továbbá ha $n\in A$, akkor $2n+2\in B$. Mekkora $|A\cup B|$ maximuma?

(A) 62 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 74

30. Az 1, 2, 3, …, 98, 99 számokból kiválasztottunk 50 számot úgy, hogy semelyik kettő ös--szege sem 99, sem 100. Mennyi a kiválasztott számok összege?

(A) 2250 (B) 2275 (C) 2500 (D) 3550 (E) 3725

Megoldások

középiskolás tanárok versenye

1. Ha *x*. *y* és $y-\frac{1}{x}$ egyike sem nulla, akkor mennyi $\dfrac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}$ értéke?

(A) 1 (B) $\frac{x}{y}$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $xy-\frac{1}{xy}$

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (B) $\frac{x}{y}$

Megoldás: $\dfrac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{xy-1}{x}}=\dfrac{xy-1}{y}\cdot\dfrac{x}{xy-1}=\dfrac{x}{y}$

2. Mennyi a $\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$ kifejezés értéke?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ (D) 2 (E) $\sqrt{7}-1$

Válasz: (A) 1

Megoldás:

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=1.$$

3. Ha $a+\frac{1}{a}=3$, akkor mennyi $\left|a-\frac{1}{a}\right|$ értéke?

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1,5 (D) 2 (E) $\sqrt[3]{3}$

Válasz: (A) $\sqrt{5}$

Megoldás: Ha $a+\frac{1}{a}=3$, akkor $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=9$, $a^2+2+\frac{1}{a^2}=9$, tehát $a^2-2+\frac{1}{a^2}=5$, azaz $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=5$, $\left|a-\frac{1}{a}\right|=\sqrt{5}.$

4. $\dfrac{2011^2+2009}{2010}=?$

(A) 2009 (B) 2010 (C) 2011 (D) 2012 (E) 2013

Válasz: (E) 2013

Megoldás. Az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ azonosságot használjuk:

$$\frac{2011^2+2009}{2010}=\frac{2011^2-1+2010}{2010}=\frac{2011^2-1}{2010}+1=\frac{(2011+1)(2011-1)}{2010}+1=$$
$$=\frac{2010\cdot 2012}{2010}+1=2012+1=2013$$

5. Ha $6x+7y=1213,\ 7x+6y=2011$, akkor mennyi $x+y$ értéke?

(A) 248 (B) 249 (C) 250 (D) 251 (E) 252

Válasz: (A) 248

Megoldás: $(6x+7y)+(7x+6y)=13(x+y)$, azaz $1213+2011=3224=13(x+y)$, így $x+y=248$.

6. Mennyi $\sqrt{x^2-y^2}$ értéke, ha $x+y+\sqrt{x+y}=72$ és $x-y-\sqrt{x-y}=30$?

(A) 24 (B) 30 (C) 48 (D) 72

(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (C) 48

Megoldás: Az első egyenlet $a^2+a=72$ alakú, ennek a pozitív megoldása 8, így $\sqrt{x+y}=8$. A második egyenlet $b^2-b=30$ alakú, $\sqrt{x-y}=6$. $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x-y}=8\cdot 6=48$

7. $a_1=7,\ a_{n+1}=\sqrt{|a_n^2-16|}$, ahol n pozitív egész szám. $a_{80}=?$

(A) 1 (B) 7 (C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{17}$ (E) $\sqrt{33}$

Válasz: (A) 1

Megoldás: A sorozat tagjai: $7, \sqrt{33}, \sqrt{17}, 1, \sqrt{15}, 1, \sqrt{15}, \ldots\ a_{80}=1$.

8. Ha x és y valós számok, akkor mennyi $|1000-x|+|x-y|+|y-2011|$ legkisebb értéke?

(A) 1000 (B) 1011 (C) 2011 (D) 3011 (E) 4022

Válasz: (B) 1011

Megoldás: A $|1000-x|+|x-y|+|y-2011|$ kifejezés három távolság összegét jelenti: az 1000 és az x, az x és az y, valamint az y és 2011 számpárok távolságainak összegét. Ha x és y 1000 és 2011 között van, akkor a távolságok összege $|2011-1000|=1011$, ha x és y közül akárcsak az egyik is kisebb 1000-nél, vagy nagyobb 2011-nél, akkor a távolságok összege nagyobb 1011-nél. A távolságok összegének minimuma 1011.

9. Hány megoldása van az $|x-1|\cdot|x+2|=|x+1|\cdot|x-2|$ egyenletnek a valós számok körében?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (D) 3

Megoldás: Szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezőinek abszolút értékéből képezett szorzattal, és fordítva, tehát az $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ és $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ szorzatok abszolút értéke egyenlő. Ez kétféleképpen teljesülhet: a két szorzat egyenlő, és így a különbségük 0, vagy egymás negatívja, ezért az összegük 0. Az első esetben $x=0$. A második esetben $x^2+x-2=-(x^2-x-2)$, azaz $x^2=2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Az egyenletnek három gyöke van.

10. Hány gyöke van az $x^{x+2}=x^5$ egyenletnek a valós számok körében?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Válasz: (C) 4

Megoldás: Három esetet kell vizsgálni: ha a hatvány alapja pozitív, nulla, vagy negatív.

Ha $x>0$, akkor vagy $x=1$, vagy a kitevők egyenlők: $x=3$.

Ha $x=0$, akkor ez megoldás is.

Ha $x<0$, akkor az $x+2$ kitevő egész szám, azaz $x=-k$ egész, ahol *k* pozitív egész szám. $(-k)^{2-k}=(-k)^5$, vagyis $(-k)^{3+k}=1$, ez a pozitív egészek közül $k=1$ esetén teljesül: $x=-1$.

Az egyenlet gyökei: -1, 0, 1, 3

11. Mennyi az $x^2+y^2+x-y+xy+2$ kifejezés legkisebb értéke?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (B) 1

Megoldás: $2(x^2+y^2+x-y+xy+1)=(x+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2\geq 0$, a 0 értéket felveszi a kifejezés, ha $x=-1$, $y=1$. Így $x^2+y^2+x-y+xy+1\geq 0$, $x^2+y^2+x-y+xy+2\geq 1$.

12. Mennyi az $x^2-4x+1=0$ egyenlet gyökei köbének összege?

(A) 48 (B) 52 (C) 56 (D) 60 (E) 64

Válasz: (B) 52

Megoldás: A gyökök és együtthatók közti összefüggéseket használjuk. Az egyenlet gyökei x_1, x_2. (Van két valós gyök, mert a diszkrimináns pozitív.) $x_1+x_2=4$, és $x_1\cdot x_2=1$. Az egyenlet gyökei köbének összege: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=64-3\cdot 4=52$

13. $\log_6 10\cdot\lg\sqrt[10]{216}=?$

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{3}{10}$ (D) $-\frac{10}{3}$

(E) Az előző válaszok egyike sem helyes.

Válasz: (A) $\frac{3}{10}$

Megoldás: $\log_6 10\cdot\lg\sqrt[10]{216}=\frac{\lg 10}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 216}{10}=\frac{1}{\lg 6}\cdot\frac{3\cdot\lg 6}{10}=\frac{3}{10}$.

14. Hány olyan *n* pozitív egész szám van, amelyre n^3+2n^2+9n+8 értéke köbszám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
(E) végtelen sok

Válasz: (B) 1
Megoldás: Mivel $n^3<n^3+2n^2+9n+8<(n+2)^3$, így $n^3+2n^2+9n+8=(n+1)^3$ kell legyen. $n^2=6n+7$, azaz $n=7$.

15. Hány olyan pozitív egészekből álló (*x*; *y*) rendezett számpár van, amelyre $x^2-y^2=275$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Válasz: (D) 3
Megoldás: Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot alkalmazva $(x-y)(x+y)=275=11\cdot 25$
Az $(x-y,\ x+y)$ számpárok lehetséges értékei: $(1,275)$, $(5,55)$, $(11,25)$. Innen az (*x*; *y*) rendezett számpárok: $(138;137)$, $(30;25)$, $(18;7)$. Három olyan pozitív egészekből álló (*x*; *y*) rendezett számpár van, amely megoldása az egyenletnek.

16. Mennyi az 1591 prímosztóinak összege?

(A) 70 (B) 80 (C) 90 (D) 100 (E) 110

Válasz: (B) 80
Megoldás: $1591=1600-9=40^2-3^2=(40-3)(40+3)=37\cdot 43$, továbbá a 37 és 43 számok prímek, így az 1591 szám prímosztóinak összege 80.

17. Milyen számjegy áll abban a legkisebb 99-cel osztható pozitív egész számban második számjegyként, melynek minden számjegye páros?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Válasz: (B) 2
Megoldás: A számjegyek összege 9-cel osztható, és mivel páros számokat adunk össze, ezért az összeg 18, 36, … lehet. A számjegyek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel. 228888.

18. Jelölje p_i az *i*-edik prímszámot. Hány olyan pozitív egész *n* és *k* számpár van, amelyre

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = k^2-1$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
(E) Végtelen sok.

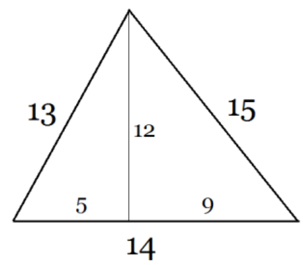
Válasz: (A) 0
Megoldás: A bal oldal osztható 2-vel, de 4-gyel nem. A jobb oldal 4-gyel osztva 0 és 3 maradékot adhat. Ezek miatt az egyenletnek nincs megoldása.

19. Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14 és 15 egység. Mekkora a háromszög területe?

(A) 80 (B) 82 (C) 84 (D) 86 (E) 88

Válasz: (C) 84

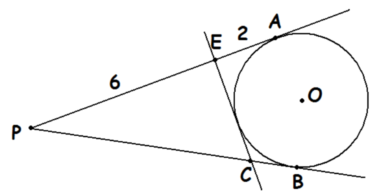
Megoldás: A háromszög két jól ismert derékszögű háromszögből áll össze.



Ha ezt észrevettük, azután már könnyű számolni a területet: $\frac{14\cdot 12}{2}=84$

Számolhatunk a *Héron-képlettel* is: $T=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{7^2\cdot 3^2\cdot 4^2}=84$

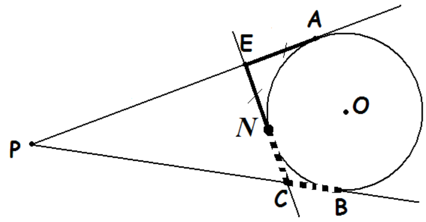
20. Az *O* középpontú kör érintői a *PA*, *PB* és *EC* egyenesek. Ha $PE=6$, $EA=2$, akkor mekkora a *PEC* háromszög kerülete?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

Válasz: (B) 16

Megoldás. Azt használjuk, hogy egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. $EA=EN$, ezért $PE+EN=PA$; $CN=CB$, ezért $PC+CN=PB$.



A *PEC* háromszög kerülete $=PA+PB=8+8=16$

21. Egy számot nevezzünk páratlan kitevőjűnek, ha prímtényezős felbontásában minden kitevő páratlan. Ilyenek például $13=13$, $54=2\cdot 3^3$. Legtöbb hány egymást követő páratlan kitevőjű számot lehet megadni?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (D) 7

Megoldás: 7 számot lehet: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

8 számot nem lehet, mert van közöttük $8k+4=4\cdot(2k+1)=2^2\cdot(2k+1)$ alakú szám, és ez nem páratlan kitevőjű.

22. Legtöbb hány egymást követő számot lehet úgy megadni, hogy ne legyen közöttük $a^2 \cdot b$ alakú szám, ahol $(a,b)=1$ és $a>1$?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Válasz: (D) 7
Megoldás: 7 számot lehet: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.
8 számot nem lehet, mert van közöttük $8k+4=4\cdot(2k+1)=2^2\cdot(2k+1)$ alakú szám.

23. Egy számtani sorozatban az első tíz elem összege 100, az első száz elem összege 10. Mennyi az első száztíz elem összege?

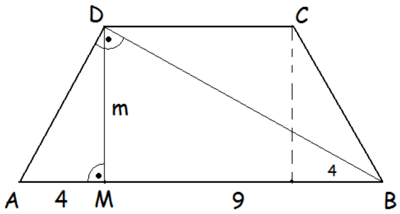
(A) –100 (B) 90 (C) 110 (D) –90 (E) –110

Válasz: (E) –110
Megoldás: $10(2a_1+9d)=200$, $100(2a_1+99d)=20$.
Ezek különbsége $90(2a_1+109d)=-180$. Tehát $2a_1+109d=-2$, ezért
$2\cdot S_{110}=110(2a_1+109d)=-220$, $S_{110}=-110$.

24. Az *ABCD* húrtrapéz *D*-ből induló magasságának talppontja az *AB* alapon *M*. Tudjuk, hogy $AM=4$, $MB=9$ és $ADB\angle=90°$. Mekkora a trapéz területe?

(A) 42 (B) 48 (C) 54 (D) 60 (E) 66

Válasz: (C) 54
Megoldás: Az *ABD* derékszögű háromszögben a magasságtétel alapján: $m=\sqrt{4\cdot 9}=6$.



A *C* pont merőleges vetülete az *AB* alapból lemetsz egy 4 hosszú darabot (a trapéz szimmetriája miatt), emiatt a *DC* szakasz vetülete az *AB*-n $9-4=5$ hosszú, $DC=5$.
A trapéz területe: $t=\frac{13+5}{2}\cdot 6=54$

25. Mi az $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok körében?

(A) $\frac{1}{2}<x<1$ (B) $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$ (C) $x>1$

(D) $0<x<1$ (E) $\frac{1}{2}<x$

Válasz: (B) $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$

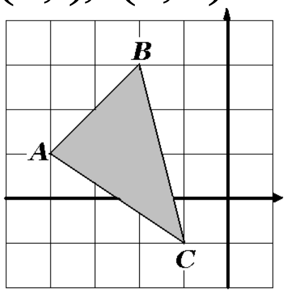
Megoldás: A kifejezések akkor értelmezhetők, ha $x>0$, $x\neq 1$, $2x^2+x-1>0$, azaz $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$.

Az $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1$ egyenlőtlenség az $\log_x(2x^3+x^2-x)>\log_x 2$ egyenlőtlenséget jelenti. Két eset van.
Ha $0<x<1$, akkor $2x^3+x^2-x<2$, azaz $2x^3+x^2-x-2<0$.
Mivel $2x^3+x^2-x-2=(x-1)\cdot(2x^2+3x+2)$, és $2x^2+3x+2$ mindig pozitív, így ebben az esetben $0<x<1$ a megoldáshalmaz.
Másik eset, ha $x>1$, akkor $2x^3+x^2-x>2$, azaz $2x^3+x^2-x-2>0$. Ezek az egyenlőtlenségek $x>1$ esetén teljesülnek.
Ezeket egybevetve az értelmezési tartománnyal, a megoldás $x>\frac{1}{2}$ és $x\neq 1$.

26. Az *x*, *y* valós számokra $\left.\begin{aligned} y-x&\leq 5\\ y+4x&\leq -5\\ 3y+2x&\geq -5\end{aligned}\right\}$ teljesül. Mekkora x^2+y^2 legnagyobb értéke?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Válasz: (E) 17
Megoldás. Az egyenlőtlenségeket teljesítő $(x;\, y)$ számpárok az *ABC* háromszögben levő pontok koordinátái, ahol $A(-4;1), B(-2;3), C(-1;-1)$.



x^2+y^2 értéke az $(x;\, y)$ pont origótól mért távolságának négyzete.
Az *ABC* háromszög pontjai közül az *A* csúcs van legtávolabb az origótól.
Ezért x^2+y^2 legnagyobb értéke $4^2+1^2=17$.

27. Melyik az a legkisebb *n* pozitív egész szám, amelyre n^n nem osztója 2010!-nak?
(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

Válasz: (C) 47
Megoldás: Ha $n^2\leq 2010$, akkor n^n osztója 2010!-nak, ugyanis a 2010!-ban tényezőként szerepel a következő *n* db szám: $n, 2n, 3n, \ldots, n\cdot n$. Mivel $1936=44^2<2010<45^2=2025$, így a keresett *n* számra $n\geq 45$ teljesül.
A $45, 2\cdot 45, 3\cdot 45, \ldots, 44\cdot 45=1980, 3, 15$ számok szorzata osztható 45^{45}-nel, és ez a szorzat osztója 2010!-nak. Tehát a 45 is kizárható.
A $46, 2\cdot 46, 3\cdot 46, \ldots, 43\cdot 46=1978, 23, 3\cdot 23, 5\cdot 23, 7\cdot 23, 10$ számok szorzata osztható 46^{46}-nal, és ez a szorzat osztója 2010!-nak. Tehát a 46 is kizárható.
A 47 prímszám, és $\left\lfloor\frac{2010}{47}\right\rfloor=42$, ezért 2010! osztható 47^{42}-nel, de nem osztható 47^{43}-nal.

28. Hány olyan rendezett $\{a, b, c, d\}$ számnégyes van, melyre $b<a, b<c, d<c$, ahol *a, b, c, d* különböző pozitív egyjegyű számok?

(A) 126 (B) 378 (C) 630 (D) 882 (E) 1134

Válasz: (C) 630

Megoldás: A $p<q<r<s$ számokat az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számokból $\binom{9}{4}$-féleképp választhatjuk. Ennek a négy számnak 5-féle olyan sorrendje van, mely teljesíti a feltételeket: $qpsr, rpsq, rqsp, sprq, sqrp$. Tehát az alkalmas $\{a, b, c, d\}$ számnégyesek száma $5\cdot\binom{9}{4}=630$

29. Az $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$ halmaznak kiválasztottuk két részhalmazát, *A*-t és *B*-t úgy, hogy $|A|=|B|$ és $|A\cap B|=0$, továbbá ha $n\in A$, akkor $2n+2\in B$. Mekkora $|A\cup B|$ maximuma?

(A) 62 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 74

Válasz: (B) 66

Megoldás: Előbb belátjuk, hogy $|A\cup B|\leq 66$, azaz $|A|\leq 33$. Megmutatjuk, ha az *A* részhalmaza az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmaznak, és *A*-nak van 34 eleme, akkor van olyan $n\in A$, hogy ekkor $2n+2\in A$.

Az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmazt felosztjuk 33 részhalmazra:

$\{1, 4\}, \{3, 8\}, \{5, 12\}, \{7, 16\}, \ldots, \{23, 48\}$ – ez 12 részhalmaz.

$\{2, 6\}, \{10, 22\}, \{14, 30\}, \{18, 38\}$ – ez 4 részhalmaz.

$\{25\}, \{27\}, \{29\}, \ldots, \{49\}$ – ez 13 részhalmaz.

$\{26\}, \{34\}, \{42\}, \{46\}$ – ez 4 részhalmaz.

Ha az $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$ halmazból választunk 34 számot, akkor az előbbi 33 részhalmaz valamelyikéből két számot veszünk, és erre a két számra teljesül, hogy az egyik *n*, a másik $2n+2$.

Tehát $|A|\leq 33$, és mint a következő példa mutatja az $|A|=33$ elérhető.

Az $A=\{1, 3, 5, 7, \ldots, 47, 49, 2, 10, 14, 18, 26, 34, 42, 46\}$ halmaz, és az ebből az $n\in A$, akkor $2n+2\in B$ szabállyal generálható *B* halmaz teljesíti a feltételeket, és ekkor $|A\cup B|=66$

30. Az 1, 2, 3, …, 98, 99 számokból kiválasztottunk 50 számot úgy, hogy semelyik kettő ös-- szege sem 99, sem 100. Mennyi a kiválasztott számok összege?

(A) 2250 (B) 2275 (C) 2500 (D) 3550 (E) 3725

Válasz: (E) 3725

Megoldás: 49 számpár van, amelyben a számok összege 100, és az 50-nek nincs párja. Ha kiválasztottunk 50 számot, akkor mindegyik párból egy számot választunk, és választjuk az 50-et is. Két szám összege nem lehet 99, és $50+49=99$, ezért a 49-et nem választhattuk, így annak a párját, az 51-et vettük ki. $51+48=99$, ezért a 48-at nem választhattuk, így annak a párját, az 52-t vettük ki. A 47-et nem választhatjuk, így a párját, az 53-at vesszük ki. Tovább válogatva, a kiválasztott 50 szám csak az 50, 51, 52, …, 99 lehet. Ezek összege 3725.