Négyzetszám totó - válaszok

1. Hány olyan négyzetszám van, ami 1-gyel nagyobb egy prímszámnál?
(1) 1; (2) végtelen sok; (X) megoldatlan.

Válasz: (1). $2^2 = 3 + 1$, és ha $k > 3$, akkor $k = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ felbontásában mindkét tényező nagyobb 1-nél, tehát k összetett.

2. Hány olyan négyzetszám van, ami 1-gyel kisebb egy prímszámnál?
(1) 1; (2) végtelen sok; (X) megoldatlan.

Válasz: (X). Ez egyike Landau négy híres prímszámos problémájának, amelyekről az 1912-es nemzetközi matematikai kongresszuson azt mondta, hogy „jelenlegi tudásunk szerint reménytelen", és ez egy évszázaddal később, ma is érvényes.

3. Hány olyan négyzetszám van, amihez alkalmas négyzetszámot hozzáadva prímszámot kapunk? (1) 1; (2) végtelen sok; (X) megoldatlan.

Válasz: (2). A 3. feladat megoldása elején említett tétel szerint (a 2 és) a $4k + 1$ alakú prímek írhatók fel két négyzetszám összegeként.

4. Maximálisan hány eleme lehet egy csupa négyzetszámból álló mértani sorozatnak?
(1) 3; (2) akármilyen sok; (X) végtelen sok.

Válasz: (X). Pl. $a_n = 4^n$.

5. Maximálisan hány eleme lehet egy csupa négyzetszámból álló mértani sorozatnak, ahol az összes elemnek nincs 1-nél nagyobb közös osztója?
(1) 3; (2) akármilyen sok; (X) végtelen sok.

Válasz: ha az 1-et nem zárjuk ki, akkor (X), pl. $a_n = 4^{n-1}$, egyébként (2). Egyrészt akármennyi lehet, mert a $4^n, 9 \cdot 4^{n-1}, 9^2 \cdot 4^{n-2}, \ldots, 9^n$ mértani sorozatnak $n+1$ eleme van, másrészt végtelen sok nem lehet, mert akkor a hányados csak egész lehet, így minden elem osztható az első elemmel.

6. Maximálisan hány eleme lehet egy csupa négyzetszámból álló számtani sorozatnak?
(1) 3; (2) akármilyen sok; (X) végtelen sok.

Válasz: ha a csupa azonos elemből álló sorozatot megengedjük, akkor (X), egyébként (1). Euler igazolta először, hogy négy (különböző) négyzetszám már nem alkothat számtani sorozatot. (Háromtagú sorozat van, pl. $1, 25, 49$, lásd a 7. feladatot is.)

7. A $7 + 11k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ egészek között a négyzetszámok száma
(1) 0; (2) 2; (X) végtelen.

Válasz: (1). Az $x = 11m, 11m \pm 1, \ldots, 11m \pm 5$ lehetőségeket végigpróbálva kapjuk, hogy x^2 nem adhat 11-gyel osztva 7 maradékot.

8. Az $5 + 11k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ egészek között a négyzetszámok száma
(1) 0; (2) 2; (X) végtelen.

Válasz: (X). Az előző próbálgatásból kiderül, hogy minden $x = 11m \pm 4$ számra x^2 maradéka 11-gyel osztva 5.

9. A pozitív Fibonacci-számok között a négyzetszámok száma
(1) 0; (2) 2; (X) végtelen.

Válasz: (2). Belátható, hogy csak az 1 és a 144 négyzetszámok (az 1-et csak egyszer számoltam).

10. Hány pozitív egész **nem** írható fel $x^2 - y^2 + z^2$ alakban, ahol x, y, z egészek?
(1) 0; (2) 5; (X) végtelen sok.

Válasz: (1). A 2. feladat alapján minden nem $4k+2$ alakú szám felírható két négyzetszám különbségeként, azaz $x^2 - y^2 + 0^2$ alakban, a $4k+2$ alakúakat $4k+2 = 4k+1+1^2$ formában írjuk, és $4k+1 = x^2 - y^2$.

11. Hány pozitív egész **nem** írható fel $x^2 + 2y^2 + z^2$ alakban, ahol x, y, z egészek?
(1) 0; (2) 5; (X) végtelen sok.

Válasz: (X). Ha $n = x^2 + 2y^2 + z^2$, akkor $2n = (x + z)^2 + (x - z)^2 + (2y)^2$ három négyzetszám összege, ami a 2. feladat szerint $2n = 4^r(8t + 7)$ esetén nem lehetséges, így $n = 2 \cdot 4^{r-1}(8t + 7)$ nem írható fel a kívánt alakban (a fentiek alapján könnyen adódik, hogy minden más n viszont igen).

12. Hány olyan egész oldalú derékszögű háromszög van, amelynek a kerülete négyzetszám?
(1) 0; (2) 500; (X) végtelen sok.

Válasz: (X). Pl. a $3k, 4k, 5k$ oldalú megfelel, ha $k = 12s^2$ alakú. Ha relatív prím oldalúakat kérdezünk, akkor is van végtelen sok: a pitagoraszi alapmegoldások szerint a kerület $m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2 = 2m(m + n)$, így ha pl. $m = 2a^2, n = b^2 - 2a^2$, ahol b páratlan, $(a, b) = 1$ és $m > n$, akkor megfelelő háromszöget kapunk.

13. Hány olyan egész oldalú derékszögű háromszög van, amelynek a területe négyzetszám?
(1) 0; (2) 500; (X) végtelen sok.

Válasz: (1). A pitagoraszi számhármasok képletét használva $a = 2mns, b = (m^2 - n^2)s$, ahol $(m, n) = 1, m > n > 0$ és m, n különböző paritásúak. A terület $ab/2 = s^2mn(m + n)(m - n)$, ez pontosan akkor négyzetszám, ha $mn(m + n)(m - n)$ is az. Itt a tényezők páronként relatív prímek, tehát ez csak úgy teljesülhet, ha a tényezők külön-külön is négyzetszámok: $m = A^2$, $n = B^2$, $m + n = A^2 + B^2 = C^2$, $m - n = A^2 - B^2 = D^2$. Két négyzetszám összege és különbsége azonban nem lehet egyszerre négyzetszám (lásd pl. Freud–Gyarmati Számelmélet 7.7.3. Lemma).

+1. Hány pozitív négyzetszám írható fel két relatív prím köbszám különbségeként?
(1) 0; (2) 3; (X) végtelen sok.

Válasz: (X). Pl. $y^2 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$, ezt 12-vel szorozva a $(6x+3)^2 - 12y^2 = -3$ egyenlethez jutunk, ami ekvivalens a $z^2 - 12y^2 = -3$ egyenlettel. Ennek van megoldása ($z = 3, y = 1$), és ezt a $z^2 - 12y^2 = 1$ Pell-egyenlet végtelen sok megoldásával az 1c feladatnál látott módon kombinálva végtelen sok megoldást kapunk.