# Gépet lehet használni?

Erben Péter

Rátz László Vándorgyűlés, Révkomárom,
2011. július 5-8.

# Feladatmegoldás közben

$$\ldots$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

„Gépet lehet használni?''

# Feladatmegoldás közben

$$\ldots$$

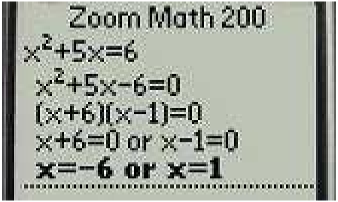
$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

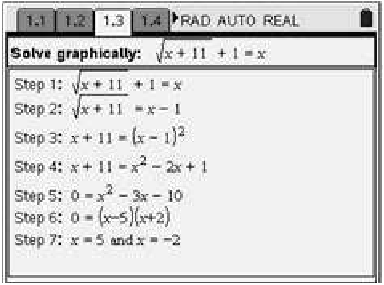
„Gépet lehet használni?”

# Válaszok és víziók

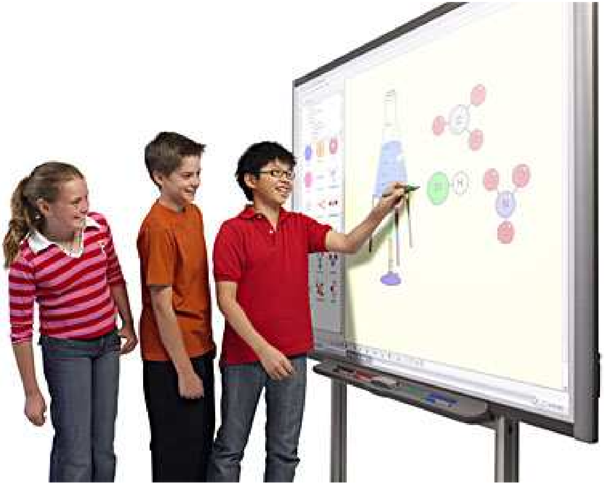
# Számológépet mindenkinek!

(8+√(8^2+4×9))÷2

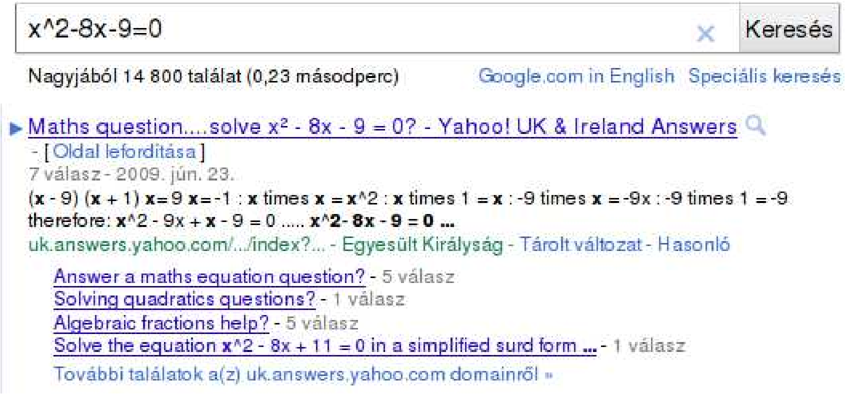


# Bűvölj el!

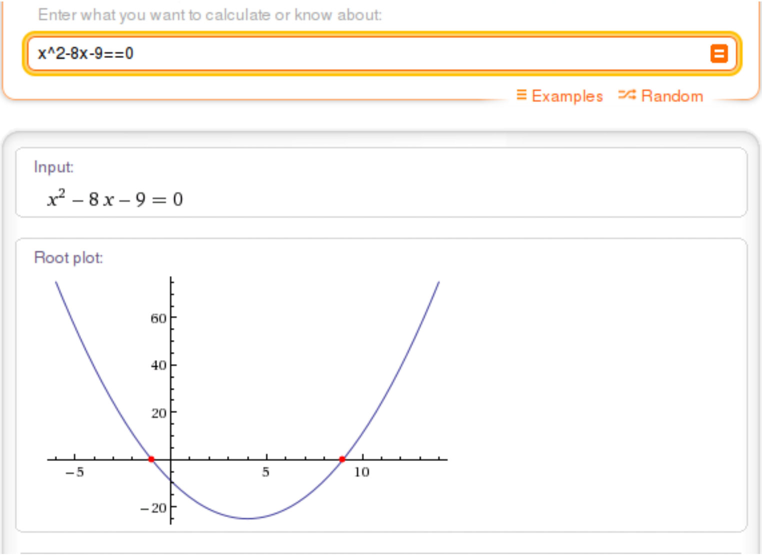


# Keress rá!

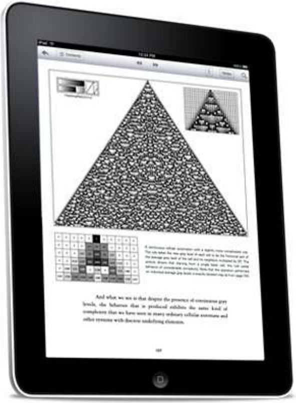


x^2-8x-9=0
Keresés
Nagyjából 14 800 találat (0,23 másodperc)
Google.com in English
Speciális keresés
Maths question....solve x² - 8x - 9 = 0? - Yahoo! UK & Ireland Answers
- [ Oldal lefordítása ]
7 válasz - 2009. jún. 23.
(x - 9) (x + 1) x= 9 x= -1 : x times x = x^2 : x times 1 = x : -9 times x = -9x : -9 times 1 = -9
therefore: x^2 - 9x + x - 9 = 0 ..... x^2- 8x - 9 = 0 ...
uk.answers.yahoo.com/.../index?... - Egyesült Királyság - Tárolt változat - Hasonló
Answer a maths equation question? - 5 válasz
Solving quadratics questions? - 1 válasz
Algebraic fractions help? - 5 válasz
Solve the equation x^2 - 8x + 11 = 0 in a simplified surd form ... - 1 válasz
További találatok a(z) uk.answers.yahoo.com domainről »

# Használd algoritmusainkat!



# Stephen Wolfram



# Mi a matematika?

Conrad Wolfram

1. A megfelelő kérdés megtalálása
2. A kérdés lefordítása a matematika nyelvére
3. A matematikai válasz kiszámítása
4. Az eredmény egybevetése a valósággal

# Mit tanítsunk?

Conrad Wolfram


1. A megfelelő kérdés megtalálása
2. A kérdés lefordítása a matematika nyelvére
3. A matematikai válasz kiszámítása
4. Az eredmény egybevetése a valósággal

# A gépeké a jövő?

- Kézzel *fárasztó* számolni
- A tanári előadás *unalmas*
- A „hagyományos” tanóra *ingerszegény*
- A *tekintélyelvű* információátadás kora leáldozott
- A mechanikus tevékenység helyett a *lényeggel* lehet foglalkozni

# Hogyan olvasnak a fiatalok?

Fenyő D. György írása alapján

hagyományos

- lineáris
- verbális
- globális
- struktúra
- szerzői szándék

digitális

- szimultán
- képi
- válogató
- egyedi elemek
- olvasói élmény

# Douglas Rushkoff

- Ne legyél mindig online!
- Ne légy anonim!
- Kell hogy legyen valami igazság abban, amit csinálsz.
- Programozz, vagy beprogramoznak!

# Másodfokú egyenlet

```
BE(a,b,c)
Ha a = 0 vagy b*b < 4*a*c akkor
    hibaüzenet
különben
    D := b*b - 4*a*c
    x1 := (-b+sqrt(D))/(2*a)
    x2 := (-b-sqrt(D))/(2*a)
    KI(x1, x2)
Elágazás vége
```

# Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

# Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

# A T[1..n] tömb rendezése

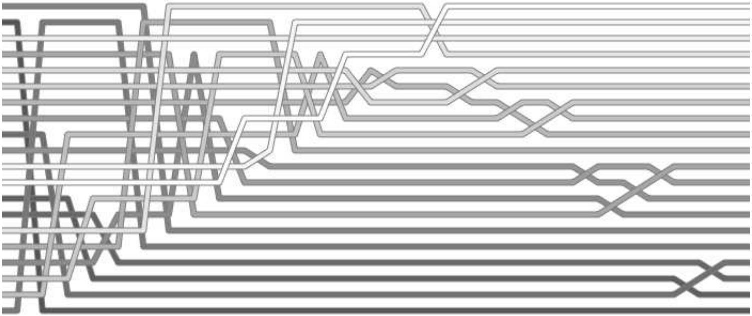
T[1]=5, T[2]=1, T[3]=2, T[4]=4, T[5]=3

Cél: az elemek növekvő rendezése

Művelet: két tetszőleges elem cseréje

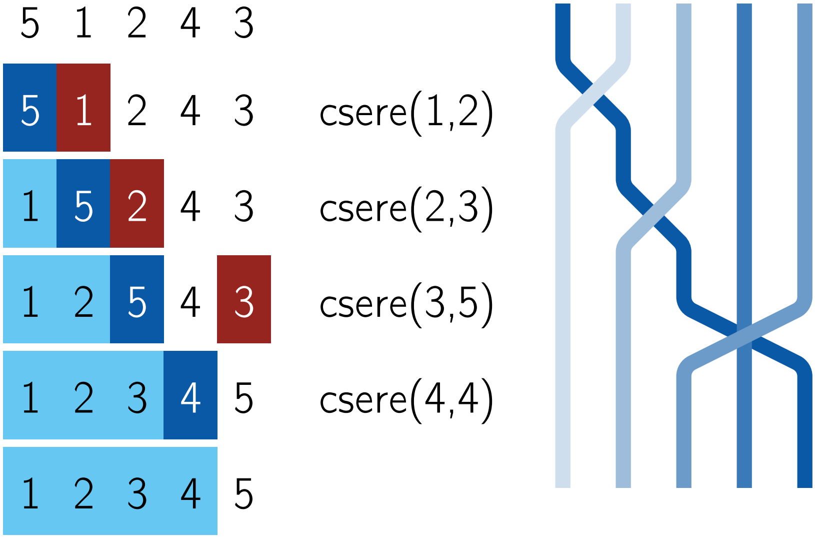
5 1 2 4 3

1 5 2 4 3



## Minimumkiválasztásos rendezés

```
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    min := i
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha T[j] < T[min] akkor
            min := j
    Ciklus vége
    Csere(i,min)
Ciklus vége
```


5 1 2 4 3
5 1 2 4 3
csere(1,2)
1 5 2 4 3
csere(2,3)
1 2 5 4 3
csere(3,5)
1 2 3 4 5
csere(4,4)
1 2 3 4 5

# Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

# Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

$$\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- $k$. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

# Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 



$$\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- $k$. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

# Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

$\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- $k$. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

# Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

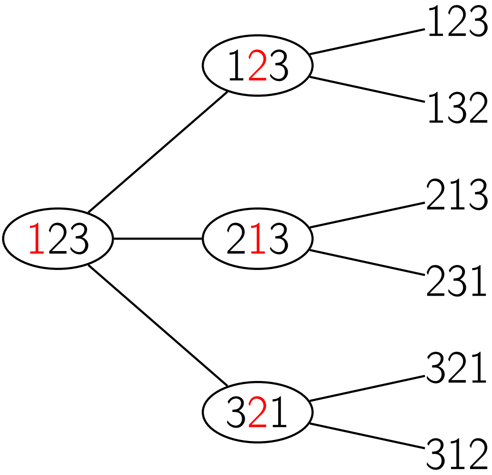
$$\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- $k$. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

## Véletlen permutáció

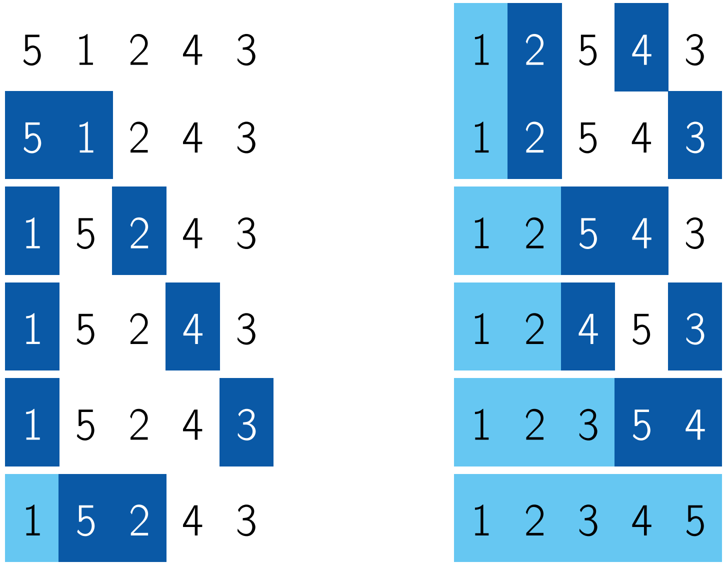
```
minden i-re T[i] := i
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    j := Véletlen(i,n)
    Csere(i,j)
Ciklus vége
```

- Minden permutáció létrejön
- Egy permutáció $1/n!$ valószínűséggel áll elő



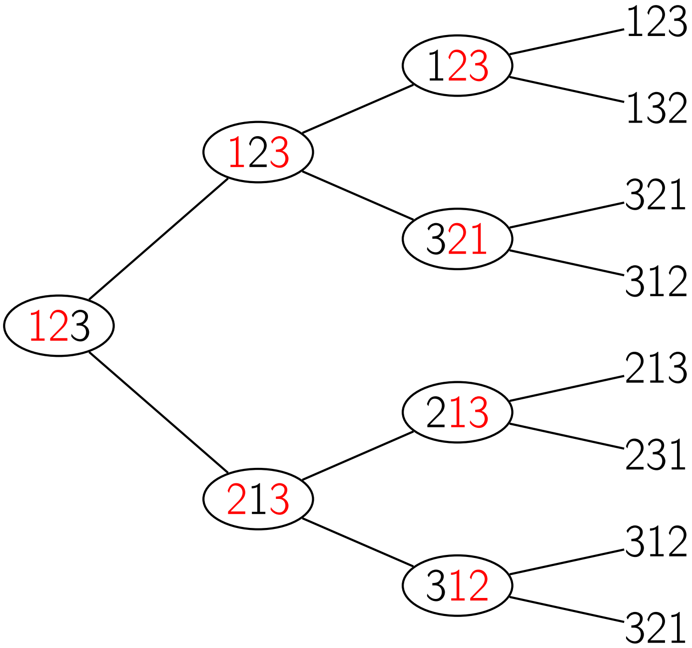
## Egyszerű cserés rendezés

```
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha T[i] > T[j] akkor
            Csere(i,j)
    Ciklus vége
Ciklus vége
```


5 1 2 4 3
5 1 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 2 5 4 3
1 2 5 4 3
1 2 5 4 3
1 2 4 5 3
1 2 3 5 4
1 2 3 4 5

## Véletlen permutáció ???

```
minden i-re T[i] := i
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha „FEJ” akkor
            Csere(i,j)
    Ciklus vége
Ciklus vége
```


123
123
213
123
321
213
312
123
132
321
312
213
231
312
321

# Goro-rendezés

T[1]=5, T[2]=1, T[3]=2, T[4]=4, T[5]=3, T[6]=6

Cél: az elemek növekvő rendezése

Művelet: a „rossz" helyen lévő elemek véletlen permutációja

5 1 2 4 3 6

1 3 5 4 2 6

# Google Code Jam 2011

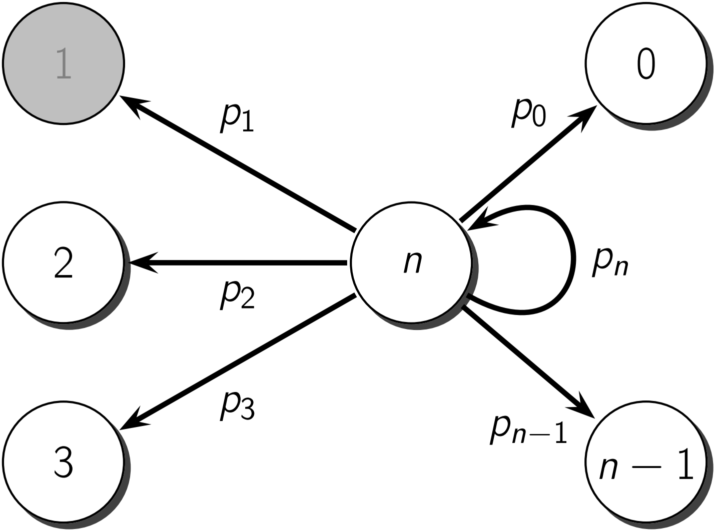
Várhatóan hány lépésben rendez Goro?

# Goro-rendezés tulajdonságai

- Csak a kezdetben rossz helyen álló elemek számítanak
- Véletlen permutálunk $\rightarrow$ csak a rossz helyen álló elemek száma érdekes

Kezdetben $n$ elem áll rossz helyen:

$$\text{várható lépésszám} = L(n)$$



1
0
$p_1$
$p_0$
2
$n$
$p_n$
$p_2$
$p_3$
$p_{n-1}$
3
$n-1$

# Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

# Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \to L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \to L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

# Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

# Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \to L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \to L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

# Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \to L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \to L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

# Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_k \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

# Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_k \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

# Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_{k} \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

# Rossz helyen álló elemek

Átlagosan $\frac{(n-1)\cdot n!}{n!} = n-1$ áll rossz helyen.

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \cdots + p_n \cdot n = n - 1$$

Átlagosan 1 fixpont van.

# Rossz helyen álló elemek

Átlagosan $\frac{(n-1)\cdot n!}{n!} = n-1$ áll rossz helyen.

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \cdots + p_n \cdot n = n-1$$

Átlagosan 1 fixpont van.

# Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Teljes indukció

$$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$$

$$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$$

$$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Teljes indukció

$$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$$

$$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$$

$$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

# Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma $k$. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

# Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma $k$. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

# Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma $k$. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

# Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma $k$. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

# Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma $k$. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

# Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

# ADMV döntő

A Zenekedvelők Végtelen Kollégiumában egyetlen – mindkét irányban végtelen hosszú – folyosón vannak a lakószobák, egészekkel sorszámozva. Lehetnek üres szobák, és egy szobában többen is lakhatnak.

| ... | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☺ | ☺ | | ☺☺☺ | |

# ADMV döntő

Minden szobában áll egy hatalmas zongora, amin a lakók szeretnek játszani. Ha azonban két szomszéd gyakorol a zongorán, az kellemetlen zenei élményhez vezet, ezért egy szobával arrébb költöznek.

| . . . | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☹♫ | ♫☹ | | ☺☺☺ | |

# ADMV döntő

Bizonyítsuk be, hogy ha a kollégiumnak véges sok lakója van, akkor véges sok nap után abbamarad a költözködés.

# Ábrázolás

| … | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☺ | ☺ | | ☺☺☺ | |

- Szobák lakóinak száma ($S_i$)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma ($L_i$)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

# Ábrázolás

| … | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☺ | ☺ | | ☺☺☺ | |

- Szobák lakóinak száma ($S_i$)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma ($L_i$)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

# Ábrázolás

| ... | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☺ | ☺ | | ☺☺☺ | |

- Szobák lakóinak száma ($S_i$)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma ($L_i$)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

# Ábrázolás

| ... | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☺ | ☺ | | ☺☺☺ | |

- Szobák lakóinak száma ($S_i$)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma ($L_i$)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

# Költözések

```
Ciklus amíg vannak szomszédok
    i := véletlen index,
        amire L[i]+1=L[i+1]
    L[i] := L[i] - 1
    L[i+1] := L[i+1] + 1
    az L[] tömb rendezése
Ciklus vége
```

# Ami változik

| … | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☹ | ☹ | | ☺☺☺ | |
| | ☺☺ | ☺☺ | | | ☺ | ☺☺☺ | |

Különbségek összege ($\nearrow$):

$$\sum |L_i - L_j| + 2(S_k + S_{k+1} - 1) = \sum |L'_i - L'_j|$$

# Ami változik

| ... | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☹ | ☹ | | ☺☺☺ | |
| | ☺☺ | ☺☺ | | | ☺ | ☺☺☺ | |

Szobaszámok szorzata ($\searrow$):

$$(k-1)(k+2) = k^2 + k - 2 < k(k+1)$$

# Ami változik

| … | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☹ | ☹ | | ☺☺☺ | |
| | ☺☺ | ☺☺ | | | ☺ | ☺☺☺ | |

Szobaszámok négyzetösszege ($\nearrow$):

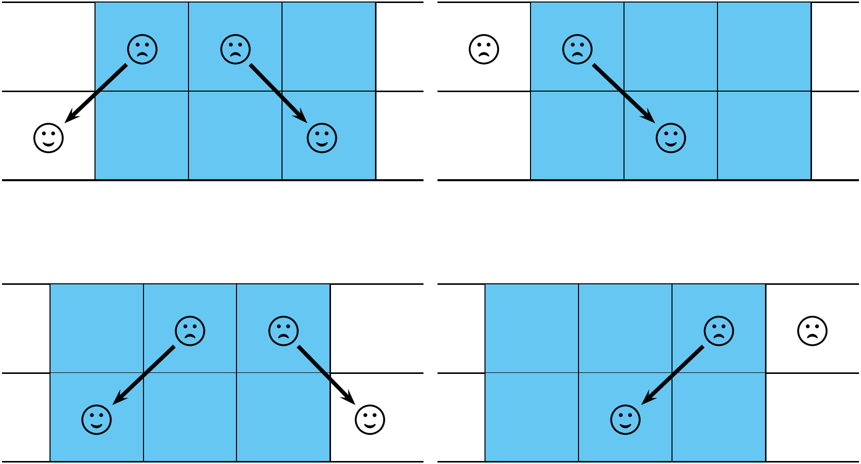
$$(k-1)^2 + (k+2)^2 = 2k^2 + 2k + 5 >$$
$$> 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$$

# Ami nem változik

| … | k-2 | k-1 | k | k+1 | k+2 | k+3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☺☺ | ☺ | ☹ | ☹ | | ☺☺☺ | |
| | ☺☺ | ☺☺ | | | ☺ | ☺☺☺ | |

Súlypont: $k + (k + 1) = (k - 1) + (k + 2)$

# Három szomszédos szoba



# Befejeződés

- Monovariáns (négyzetösszeg):
  Nincsenek ismétlődő állapotok.
- Invariáns (három szomszédos szoba):
  Korlátos tartományban maradunk.
  $n$ lakó,
  kezdetben $\min\{L_i\} = a$, $\max\{L_i\} = b$
  $a - 3n$ és $b + 3n$ között marad minden lakó

# Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

# Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

# Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

# Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

# Formális nyelvek

$E \to T$

$E \to E + T$

$T \to F$

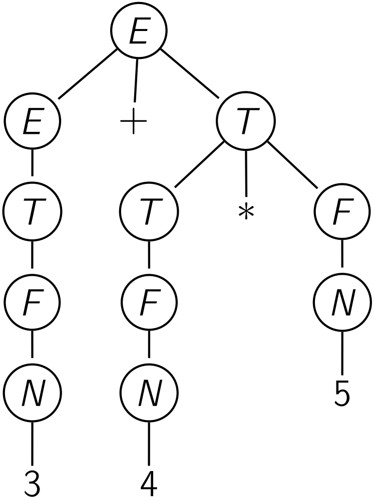
$T \to T * F$

$F \to I$

$F \to (E)$

$I \to$ egész szám

$E \Rightarrow 3 + 4 * 5$



# Szavak generálása

- **ábécé**: `{A,B}`
- **kiinduló szimbólum**: `A`
- **helyettesítési szabályok**:

$$\{\mathtt{A} \to \mathtt{AAB},\quad \mathtt{B} \to \mathtt{A}\}$$

Példa:

$$\mathtt{ABAB} \Rightarrow \mathtt{AABAAABA}$$

`A`

`AAB`

`AABAABA`

`AABAABAAABAABAAAB`

`AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...`

Észrevételek?

# Sorozatot kaptunk

$$w_0 = \texttt{A}$$

$$w_1 = \texttt{AAB}$$

$$w_2 = \texttt{AABAABA}$$

$$w_3 = \texttt{AABAABA|AABAABA|AAB}$$

$$w_{n+1} = w_n w_n w_{n-1}$$

$$w_i \Rightarrow w_{i+1}, \;\; w_n = w_{n-1} w_{n-1} w_{n-2} \Rightarrow w_n w_n w_{n-1}$$

# Sorozatot kaptunk

$w_n$ kezdőszelete $w_{n+1}$-nek

Az előállított karakterek később már nem változnak.

`AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...`

$c_1 =$ 'A', $c_2 =$ 'A', $c_3 =$ 'B', $c_4 =$ 'A', ...

## Generálás

```
c[1] := 'A'; i := 1; j := 1
Ciklus amíg j ≤ n
    Ha c[i] = 'A' akkor
        c[j]:='A'; c[j+1]:='A'
        c[j+2]:='B'; j:=j+3
    különben c[j]:='A'; j:=j+1
    Elágazás vége
i := i + 1
Ciklus vége
```

# Sorozatokat kaptunk

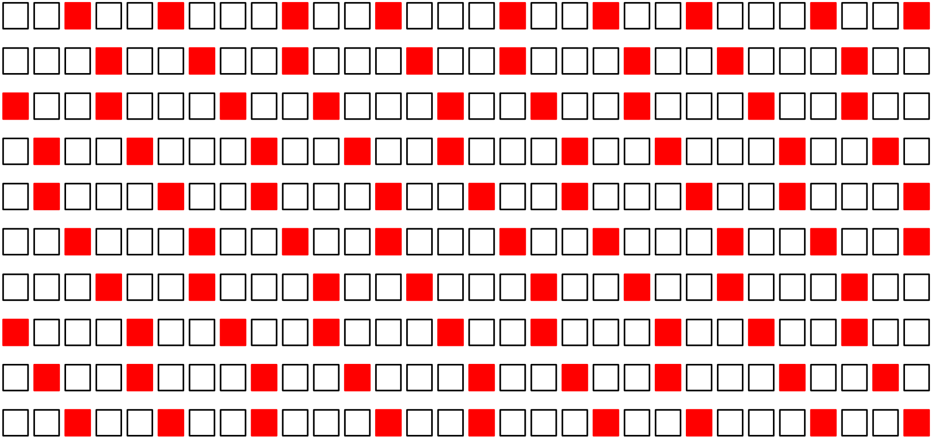
Vizsgájuk az 'A'-k és 'B'-k pozícióit!

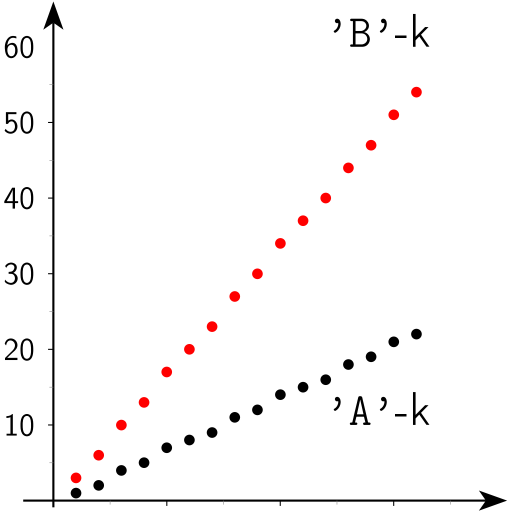
AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

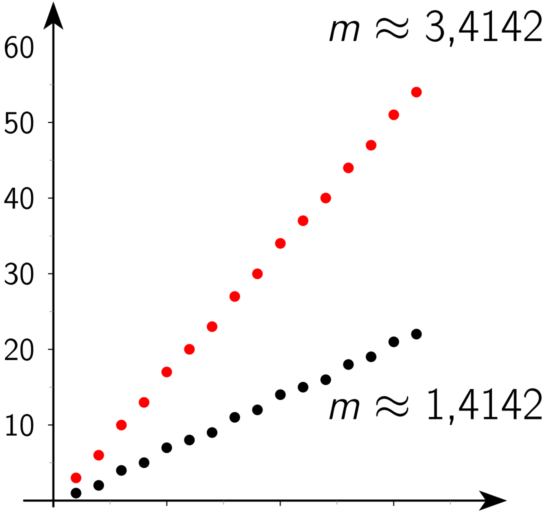
'A': 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, ...

'B': 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, ...

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAAB
AAABAABAABAAABAABAAABAABAAABAA
BAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAA
ABAABAAABAABAABAAABAABAAABAABA
ABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAAB
AABAAABAABAABAAABAABAAABAABAAB
AAABAABAAABAABAAABAABAABAAABAA
BAAABAABAABAAABAABAAABAABAABAA
ABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABA
AABAABAABAAABAABAAABAABAAABAAB...




'B'-k
'A'-k
60
50
40
30
20
10



$m \approx 3{,}4142$
60
50
40
30
20
10
$m \approx 1{,}4142$

# Arányok

| $w_n$ | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|
| `A` | 1 | 0 |
| `AAB` | 2 | 1 |
| `AABAABA` | 5 | 2 |
| `AABAABAAABAABAAAB` | 12 | 5 |

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n$$

# Arányok

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n$$

$n \geq 2:$

$$t_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n} = 2 + \frac{1}{t_n}$$

$t_{n+1} = 2 + \frac{1}{t_n}$
$t = 2 + 1/t$ pozitív gyöke: $1 + \sqrt{2}$

$$|t_{n+1} - (1 + \sqrt{2})| =$$

$$= |2 + 1/t_n - (1 + \sqrt{2})| = |1 - \sqrt{2} + 1/t_n| =$$

$$= \left|\frac{-1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{t_n}\right| = \left|\frac{1 + \sqrt{2} - t_n}{(1 + \sqrt{2}) \cdot t_n}\right|$$

# Periodicitás

$$t_n = a_n / b_n \to 1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

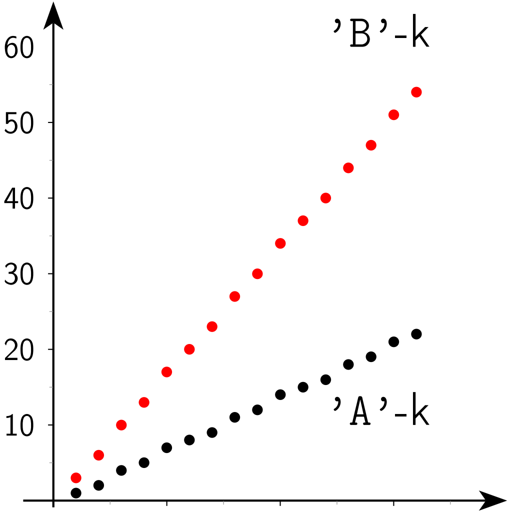
A $(c_n)$ sorozat nem periodikus.

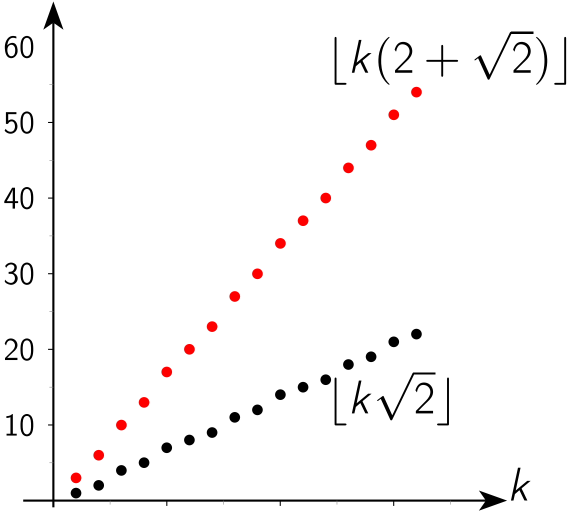
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

A $k$. `'A'` indexe $\approx \lfloor k\sqrt{2} \rfloor$

A $k$. `'B'` indexe $\approx \lfloor k(2 + \sqrt{2}) \rfloor$


'B'-k
'A'-k
60
50
40
30
20
10



60
50
40
30
20
10
$\lfloor k(2+\sqrt{2})\rfloor$
$\lfloor k\sqrt{2}\rfloor$
$k$

# 1. lemma

- $w$ tetszőleges `'A'`-`'B'` sorozat
- $w$ hossza $n$, az `'A'`-k száma $a$
- $w \Rightarrow w'$
- $w'$ hossza $n'$, az `'A'`-k száma $a'$

$$\frac{a}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a'}{n'} \quad \text{vagy} \quad \frac{a'}{n'} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a}{n}$$

# 1. lemma bizonyítása

$$n' = n + 2a, \qquad a' = n + a$$

$$a' - \frac{n'}{\sqrt{2}} = n + a - \frac{n + 2a}{\sqrt{2}} =$$

$$= -(\sqrt{2} - 1)\left(a - \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$$

# 2. lemma

- $C_n = c_1 c_2 \ldots c_n$ a feladatban generált sorozat kezdőszelete
- a $C_n$-ben szereplő `'A'`-k száma $x_n$

$C_n$ utolsó karakterén múlik $x_n$ és $\frac{n}{\sqrt{2}}$ sorrendje:

Ha $c_n = \texttt{'A'}$, akkor $x_n > \frac{n}{\sqrt{2}}$, ha pedig $c_n = \texttt{'B'}$, akkor $x_n < \frac{n}{\sqrt{2}}$.

# 2. lemma bizonyítása

$n = 1, 2, \ldots, 12$ esetén igaz.

- $c_n = \texttt{'B'}$, $C_m \Rightarrow C_n$ és $c_m = \texttt{'A'}$

  $x_m > \frac{m}{\sqrt{2}}, x_n < \frac{m}{\sqrt{2}}$ (1. lemma)
- $c_n = \texttt{'A'}$
  - $C_m \Rightarrow C_n$ és $c_m = \texttt{'B'}$
  - $C_m B \Rightarrow C_n$ ('AAB' 1. 'A'-ja)
  - $C_m BB \Rightarrow C_n$ ('AAB' 2. 'A'-ja)

# 'B'-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. 'B'

2. lemma $C_n$-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma $C_{n+1}$-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

# 'B'-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. 'B'

2. lemma $C_n$-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma $C_{n+1}$-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

# 'B'-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. 'B'

2. lemma $C_n$-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma $C_{n+1}$-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

# 'B'-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. 'B'

2. lemma $C_n$-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma $C_{n+1}$-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

# 'B'-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. 'B'

2. lemma $C_n$-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma $C_{n+1}$-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

# `'A'`-k indexe

$C_n$ utolsó karaktere a $k$. `'A'`

Hasonlóan:

$$n < k\sqrt{2} < n + 1$$

(Nehézség: `'A'` után állhat újabb `'A'`.)

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA . . .

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, . . .

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, . . .

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

$\lfloor k\sqrt{2}\rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, ...

$\lfloor k(2+\sqrt{2})\rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, ...

$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2}\rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$

$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2})\rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, ...

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, ...

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA . . .

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, . . .

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, . . .

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$$

# Beatty-tétel

Samuel Beatty (1926)

American Mathematical Monthly P.3173

- $r > 1$ irracionális
- $1/r + 1/s = 1$
- $r_n = \lfloor rn \rfloor$, $s_n = \lfloor sn \rfloor$

Minden pozitív egész előfordul $r_n$-ben vagy $s_n$-ben, de mindig csak az egyikben.

# Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

# Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

# Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

# Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

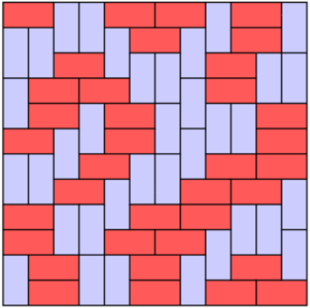
# Algoritmusok

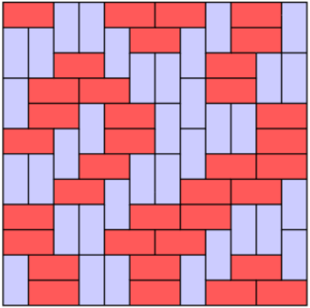
- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

- ▷ Csempézés

Mit kérdezhetünk?

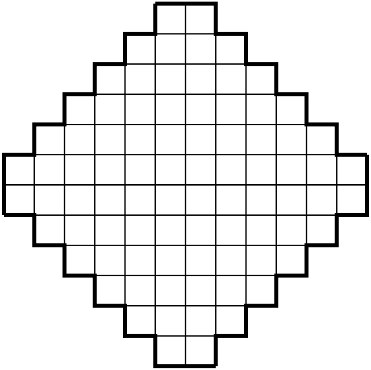
Federico Ardila - Richard P. Stanley: Tilings
Clay Mathematics Institute 2004





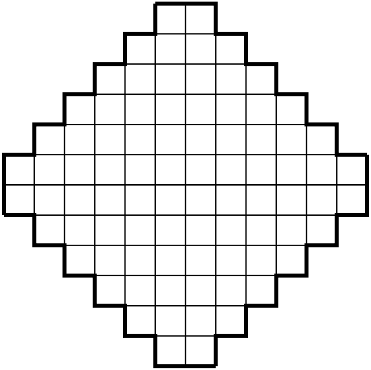
- Csempézhető?
- Hányféle módon csempézhető?
- Nagyjából hányféle módon csempézhető?
- Könnyű találni egy csempézést?
- Könnyű bizonyítani, hogy nem csempézhető?
- Hogy néz ki egy „tipikus” csempézés?

# Azték gyémánt csempézése

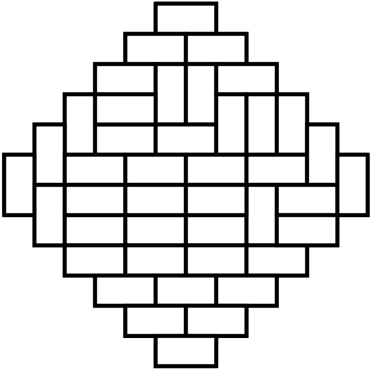


Azték gyémánt

# Aztéк gyémánt csempézése



Azték gyémánt



Csempézés dominókkal

# Sokan vannak?

Hányféle módon csempézhető az *n*-edrendű Aztték gyémánt $2 \times 1$-es dominókkal?

$$AGY(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

# Sokan vannak?

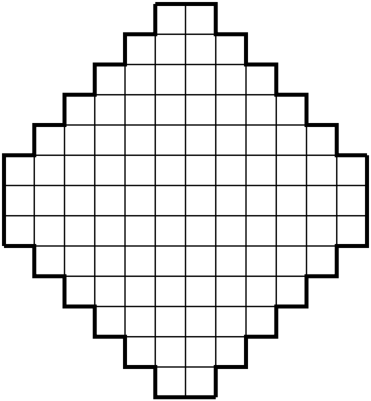
Hányféle módon csempézhető az $n$-edrendű Aztték gyémánt $2 \times 1$-es dominókkal?

$$AGY(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

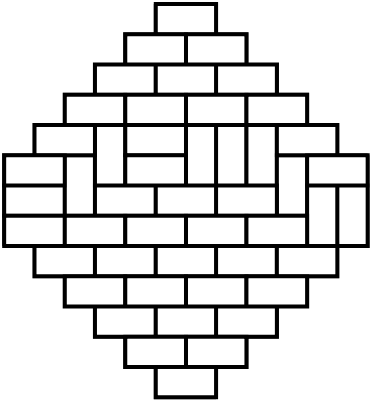
- Csempézés

  Utak és dominók

# Kibővített Azték gyémánt

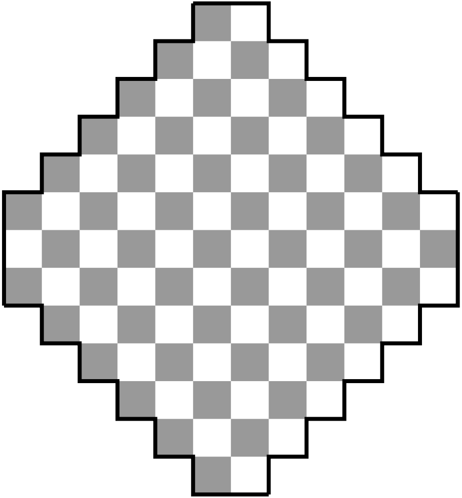


Kibővített A.GY.

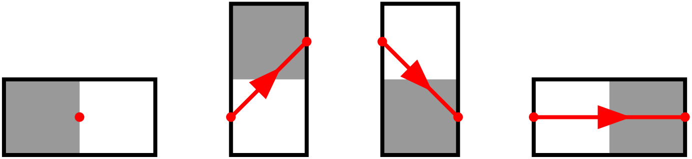


Csempézés dominókkal

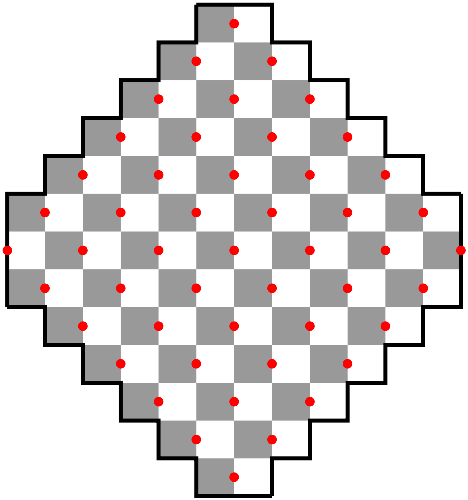
# Sakktábla színezés



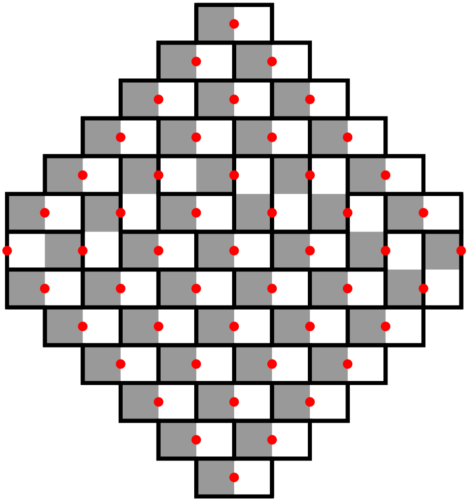
# Utak és dominók



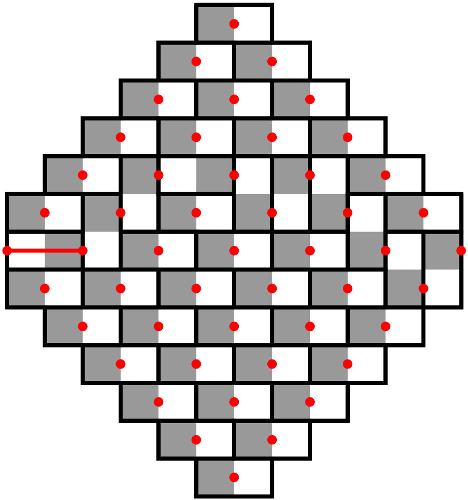
# Csempézés → út



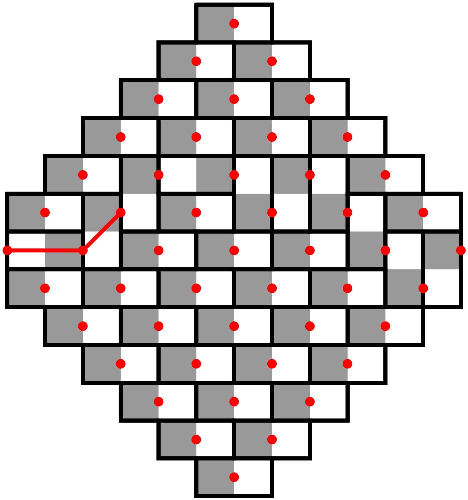
# Csempézés → út



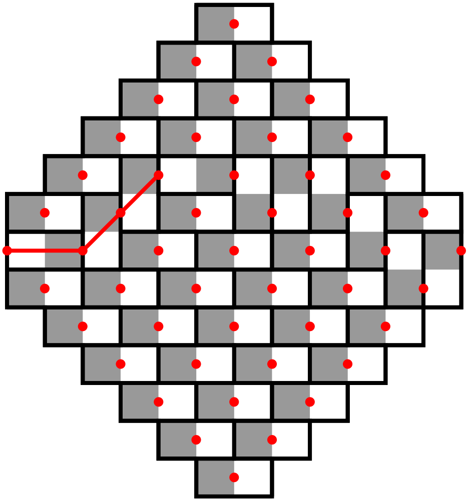
# Csempézés → út



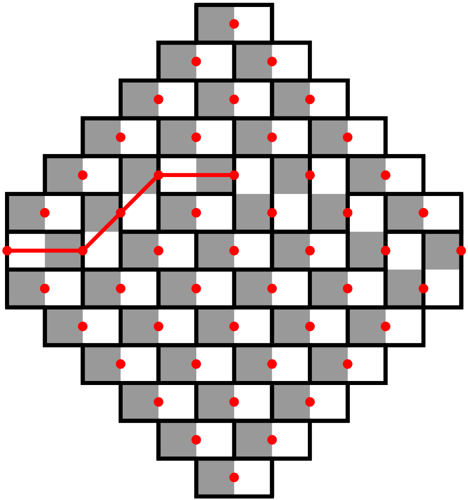
# Csempézés → út



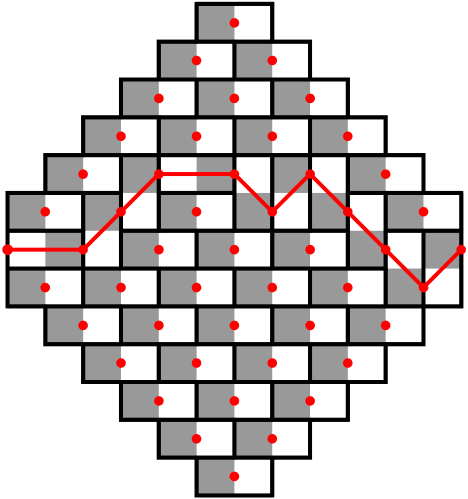
# Csempézés $\to$ út



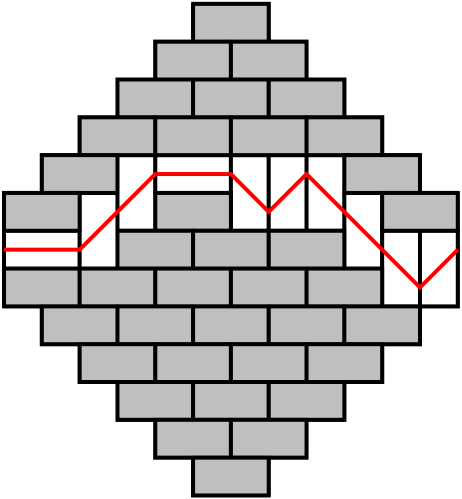
# Csempézés → út



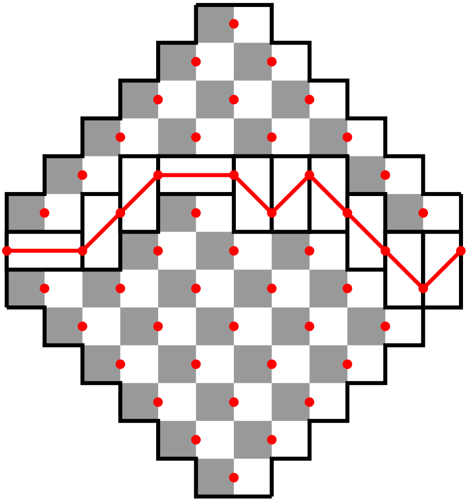
# Csempézés → út



# Csempézés → út



# Út → csempézés?

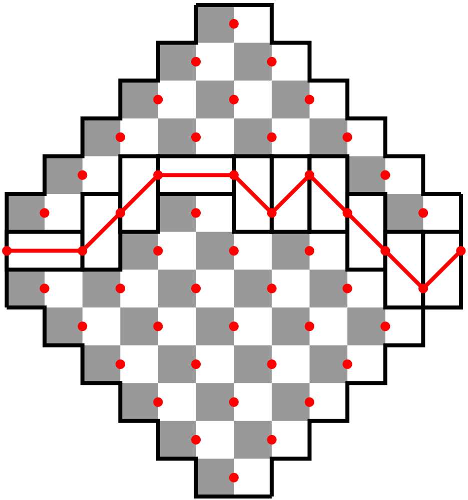


Lefedjük a rácsutat a szabályunk szerint dominókkal.

A kimaradó rész csempézhető dominókkal?

Egyértelműen?

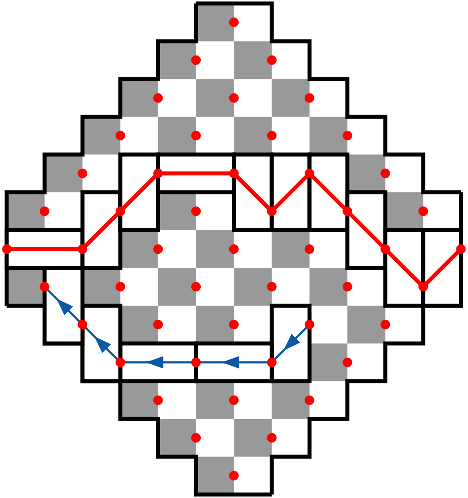
# Lefedhetőség



A fedetlen fehér mezők mellett fedetlen fekete mező van.

A kimaradó rész csempézhető vízszintes, fekete→fehér dominókkal.

# Egyértelműség

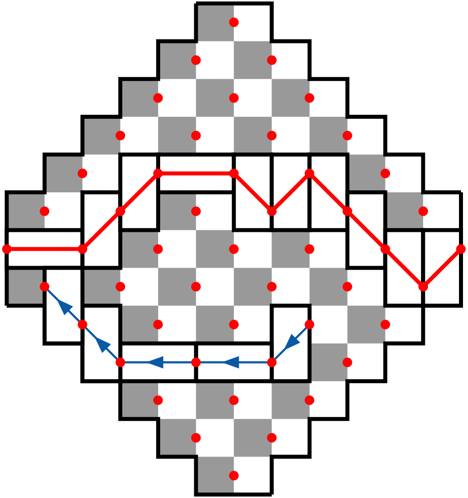


Ha lenne az előzőtől különböző fedés. . .

. . . visszafelé is elindíthatnánk egy utat. . .

. . .aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

# Egyértelműség

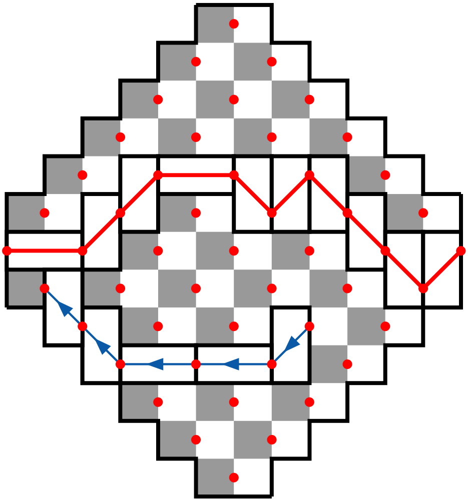


Ha lenne az előzőtől különböző fedés...

... visszafelé is elindíthatnánk egy utat...

...aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

# Egyértelműség

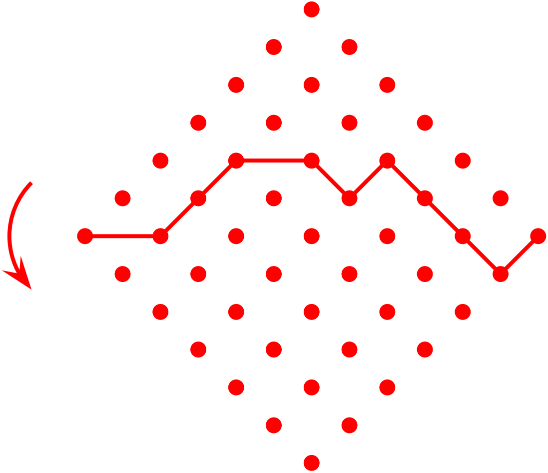


Ha lenne az előzőtől különböző fedés…

… visszafelé is elindíthatnánk egy utat…

…aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

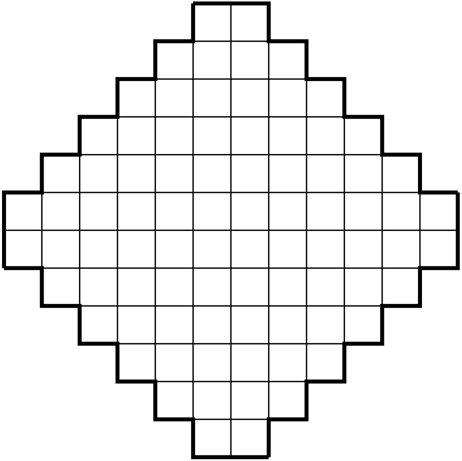
# Mit is kell megszámolni?



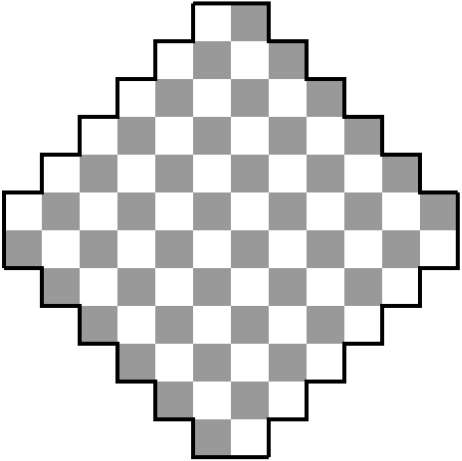
# Delannoy-számok

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 13 | 85 | 377 | 1289 | 3653 | **8989** |
| 5 | 1 | 11 | 61 | 231 | 681 | **1683** | 3653 |
| 4 | 1 | 9 | 41 | 129 | **321** | 681 | 1289 |
| 3 | 1 | 7 | 25 | **63** | 129 | 231 | 377 |
| 2 | 1 | 5 | **13** | 25 | 41 | 61 | 85 |
| 1 | 1 | **3** | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 0 | **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

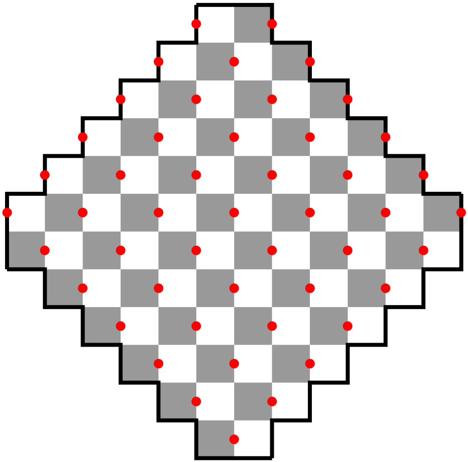
# Az eredeti feladat



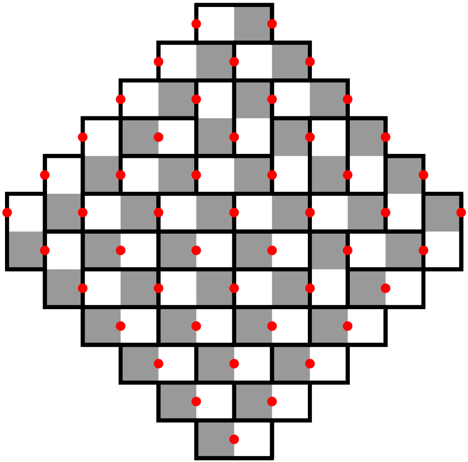
# Sakktábla



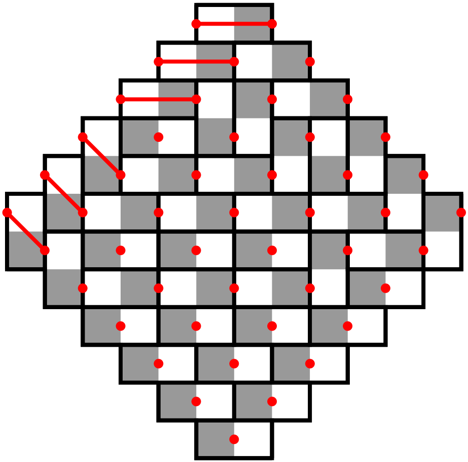
# Rácspontok



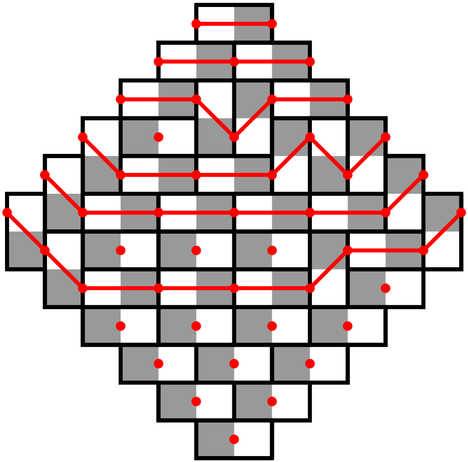
# Dominók



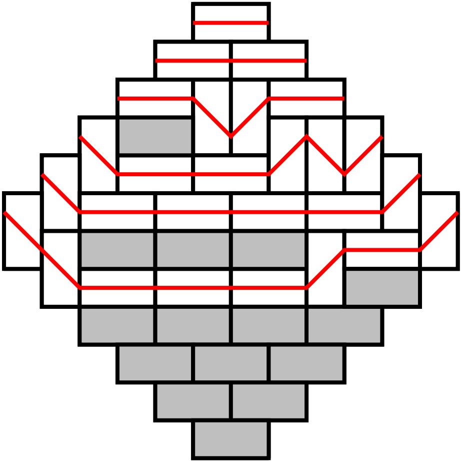
# Utak



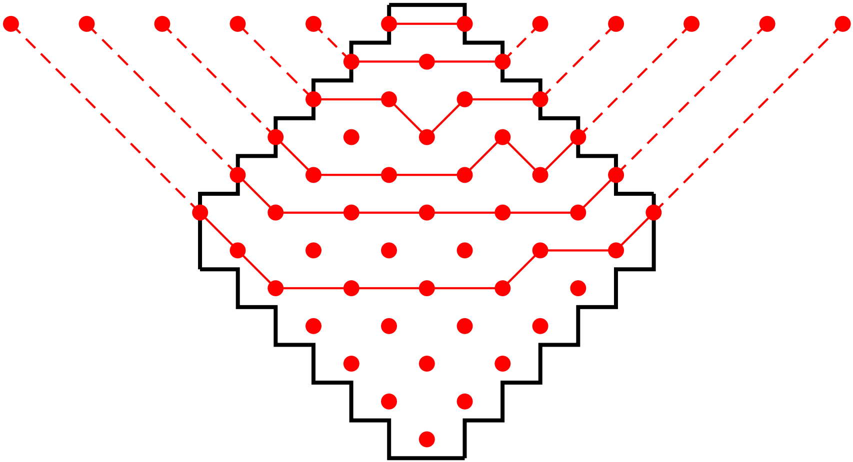
# Nem metsző útrendszer



# Csempézés ↔ útrendszer



# Az útrendszer kiterjesztése



# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\longrightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\longrightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\longrightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\longrightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\longrightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\longrightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

# Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

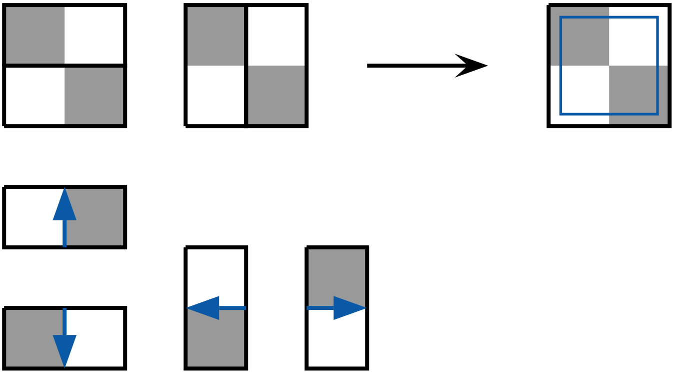
- Csempézés

  Felfújás

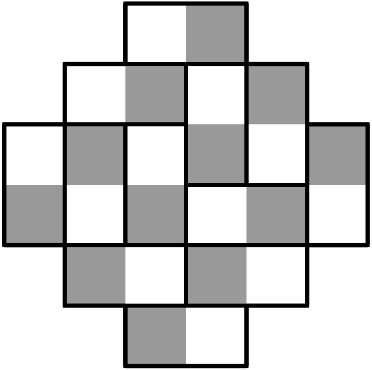
# A felfújás lépései

- „páratlan blokkok” törlése
- dominók irányítása
- dominók mozgatása
- „páratlan blokkok” kitöltése

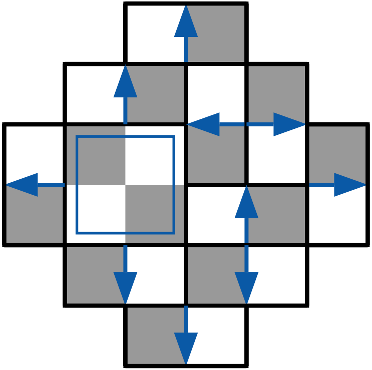
# Törlés és irányítás



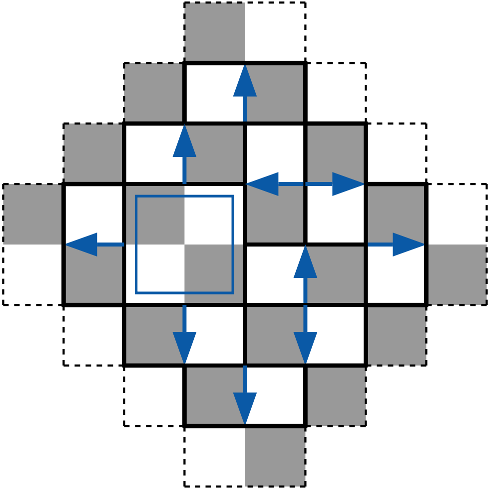
# Példa: csempézés



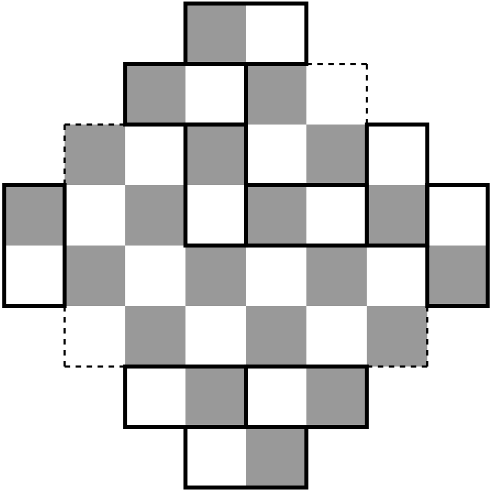
# Példa: törlés és irányítás



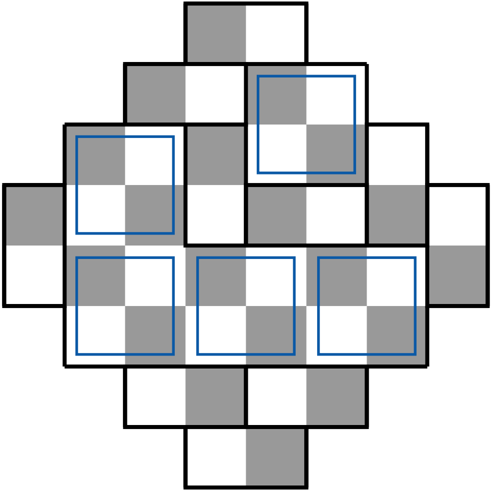
# Példa: kiterjesztés



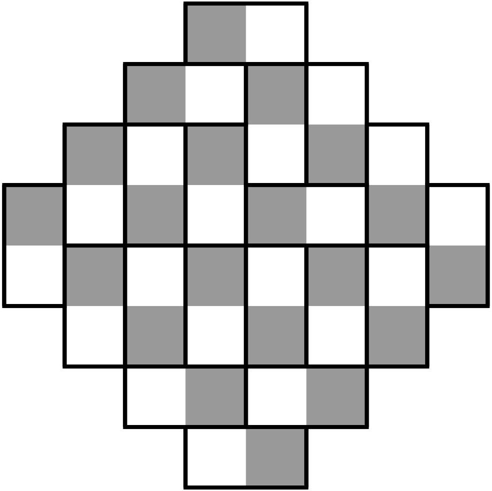
# Példa: mozgatás



# Példa: kitöltés



# Példa: kitöltés

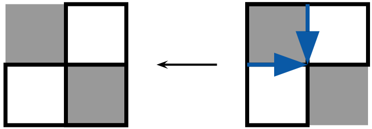


# A felfújás tulajdonságai

- az elmozgatott dominók nem fedik egymást
- az elmozgatott dominók az eggyel nagyobb Aztték gyémánt részleges csempézését adják
- a lefedetlen rész előáll $2 \times 2$-es „páratlan blokkok" egyesítéseként

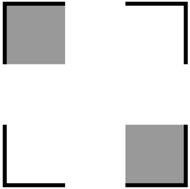
# A felfújás tulajdonságai

Létrejöhet átfedés?



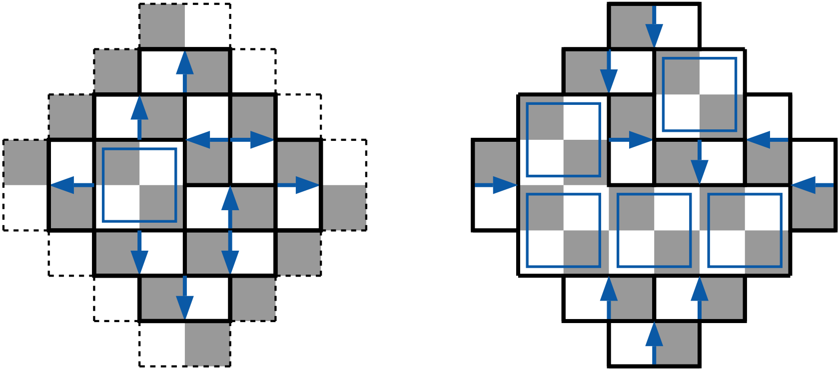
Nem fedik egymást az elmozgatott dominók.

Az üres terület sarkai:



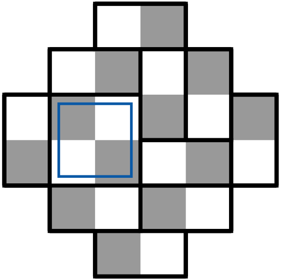
A kimaradó rész „páratlan blokkokból” áll.

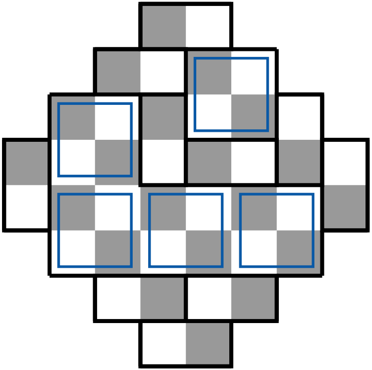
# Involúció



A „páratlan blokkoktól” mentes csempézéseken a felfújás (leeresztés) kölcsönösen egyértelmű.

# $\mathbf{AGY(n)} \rightarrow \mathbf{AGY(n+1)}$



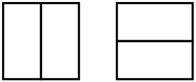


$4(n+1)$ új mező $\rightarrow$ $n+1$ új „páratlan blokk”

$\rightarrow 2^{n+1}$-féle csempézés

# Teljes indukció

- $AGY(1) = 2$



- $AGY(n+1) = 2^{n+1} \cdot AGY(n)$
- $AGY(n+1) =$

$$= 2^{n(n+1)/2} \cdot 2^{n+1} = 2^{(n+1)(n+2)/2}$$

# Csempézések száma

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $AGY(n)$ | 2 | 8 | 64 | 1024 | 32768 | 2097152 |

exponenciális növekedés:

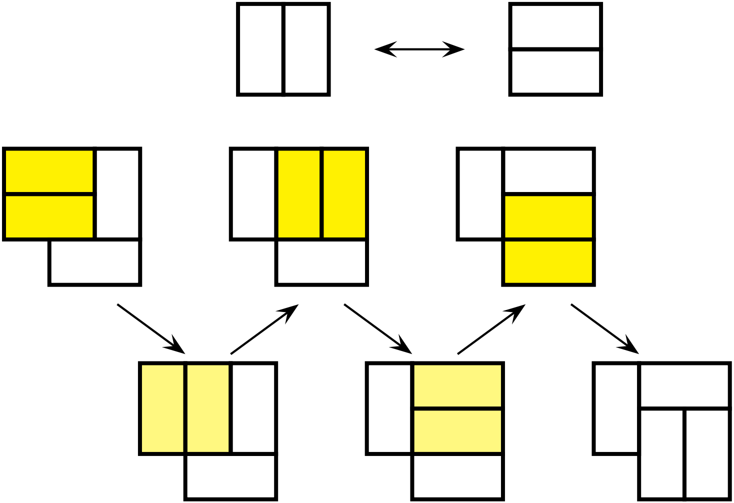
nem tudjuk az összes csempézést felsorolni

Hogyan állítható elő egy véletlen csempézés?

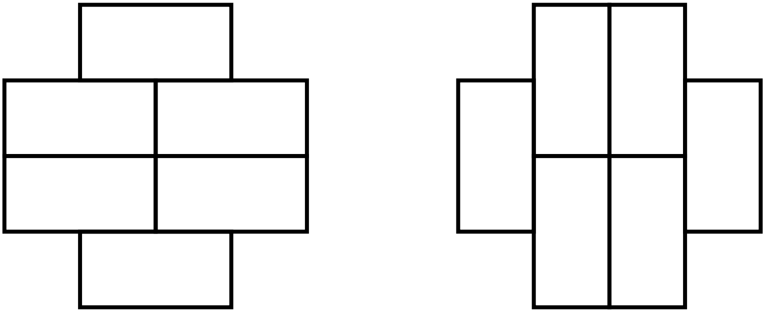
▷ Csempézés

Magasságfüggvények és forgatás

# Átalakítás forgatással

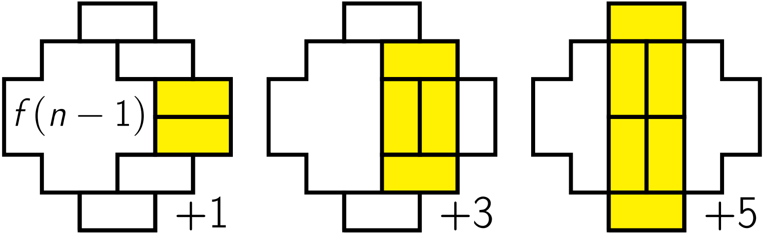


# Minimálisból maximális



# Minimálisból maximális

Sztranyák Attila bizonyítása



# Minimálisból maximális

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1 \\
f(n) &\leq f(n-1) + (1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) \\
f(n) &\leq f(n-1) + n^2 \\
f(n) &\leq 1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

# Általában?

Tétel: Az $n$-edrendű AGY bármelyik csempézéséből legfeljebb

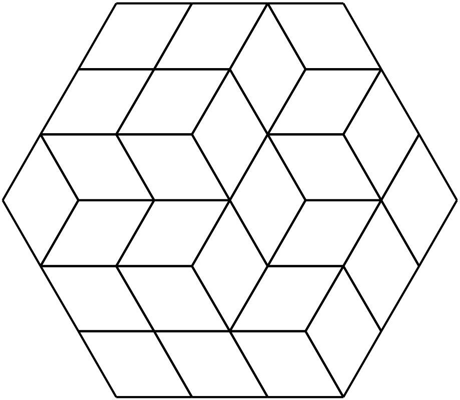
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

forgatással eljuthatunk a minimális (csupa vízszintes) csempézéshez.

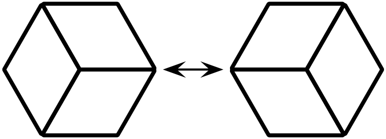
# Következmények

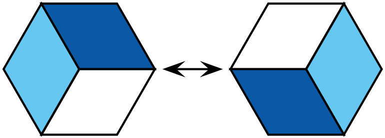
1. Két tetszőleges csempézés átvihető egymásba forgatásokkal.
2. A minimális csempézésből indulva $O(n^3)$ forgatással bármelyik csempézés előállítható.

# Csempézés rombuszokkal

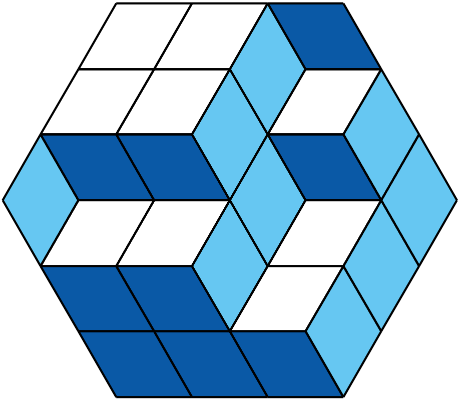


# Forgatás és emelés

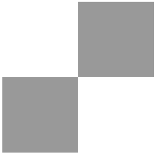


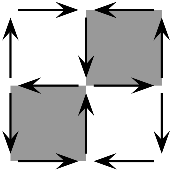


# Csempézés megemelése

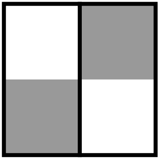


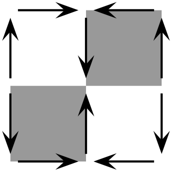
# Élek irányítása





A nyíltól balra fekete,
jobbra fehér mező van.

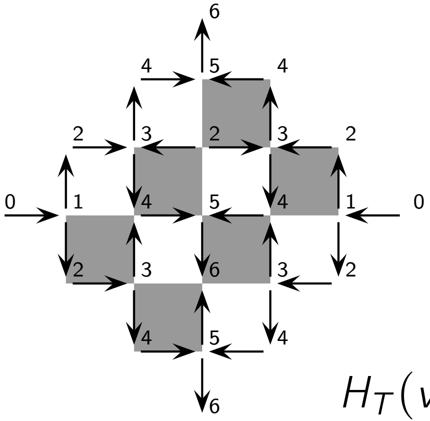




A dominóval fedett
éleket elhagyjuk.

# Magasságfüggvény

Kijelölünk egy 0 magasságot. A nyíl irányában $+1$, vele szemben $-1$ a magasság változása.

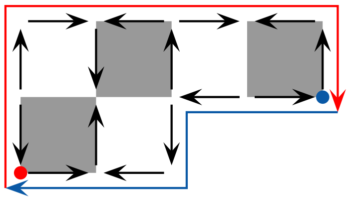



$H_T(v_i)$

# Konzisztencia

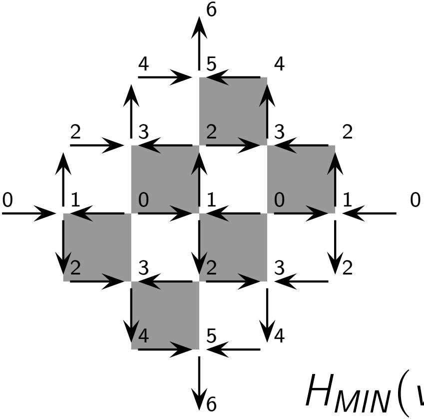
Állítás: Egy csúcs magassága független attól, milyen úton jutottunk oda.
($\rightarrow$ A magasságfüggvény jól definiált.)

„Bizonyítás”: Zárt görbén nulla az összeg.



# A minimális csempézés

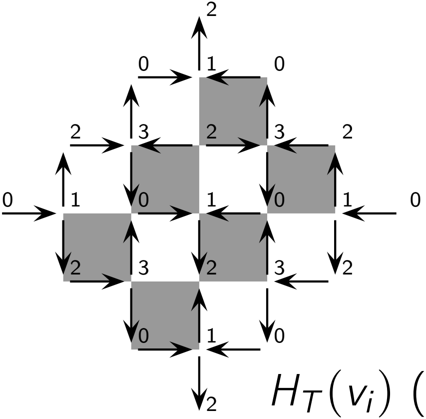
A csupa vízszintes dominóból álló csempézésben minden csúcs magassága minimális.




$H_{MIN}(v_i)$

# Magasságfüggvény (mod 4)

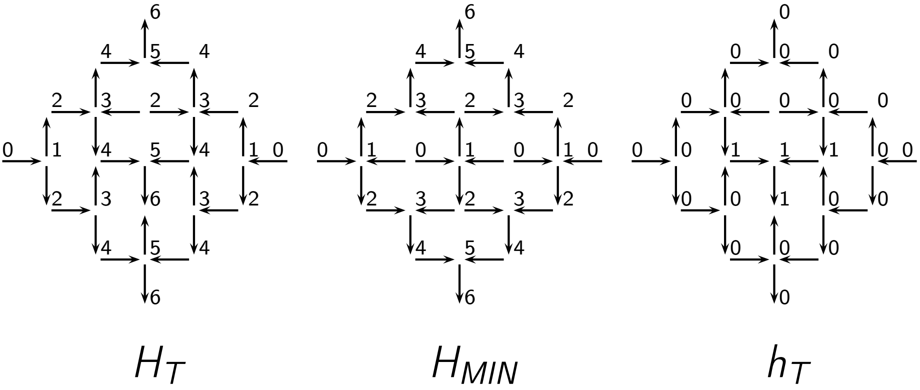
$H_T(v_i)$ négyes maradéka nem függ a csempézéstől.




$H_T(v_i) \pmod 4$

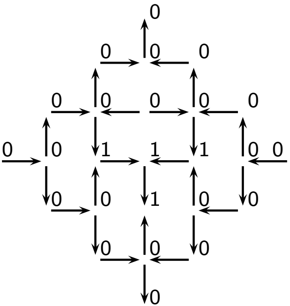
# Redukált magasságfüggvény

$$h_T(v_i) = (H_T(v_i) - H_{MIN}(v_i))/4$$



# Csempézés rangja

$$\mathrm{rang}(T) = \sum_{v_i} h_T(v_i) = 4$$



# Forgatás és magasságok

$$
\begin{tikzcd}
4 \arrow[r] & 5 \arrow[d] & 4 \arrow[l] \\
3 \arrow[u] \arrow[d] & 6 & 3 \arrow[u] \arrow[d] \\
4 \arrow[r] & 5 \arrow[u] & 4 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
4 \arrow[r] & 5 & 4 \arrow[l] \\
3 \arrow[u] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[d] \\
4 \arrow[r] & 5 & 4 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

# Forgatás és rang

Ha a $v$ csúcsban forgatunk:

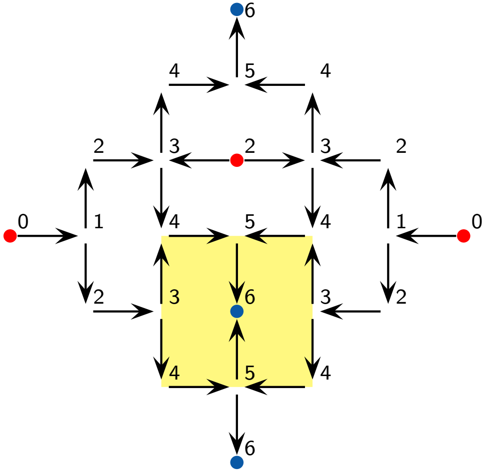
- $w \neq v$ esetén $H_{T'}(w) = H_T(w)$
- $H_{T'}(v) = H_T(v) \pm 4 \rightarrow$
  $h_{T'}(v) = h_T(v) \pm 1$
- forgatásnál a rang 1-gyel változik

# Forgatás és rang

Ha egy csempézés rangja $r$, akkor legalább $r$ forgatás kell a minimális csempézés előállításához.

(A minimális csempézés rangja 0.)

# Mindig lehet forgatni?




Forgatás középpontja: $H_T(\ )$ lokális szélsőértéke.

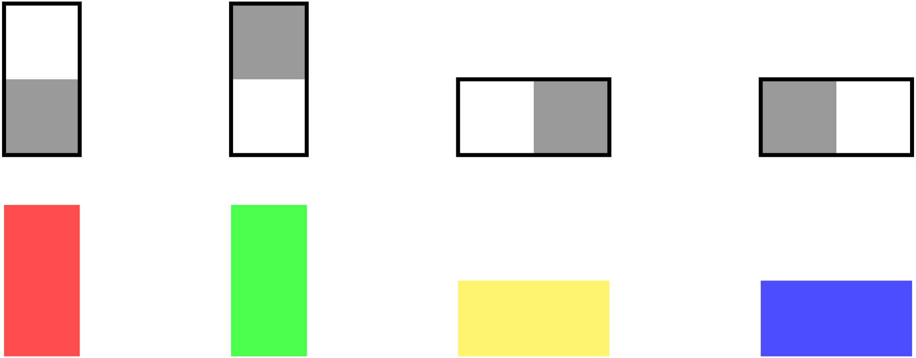
# Csempézések távolsága

A csupa függőleges dominó esetén a rang:

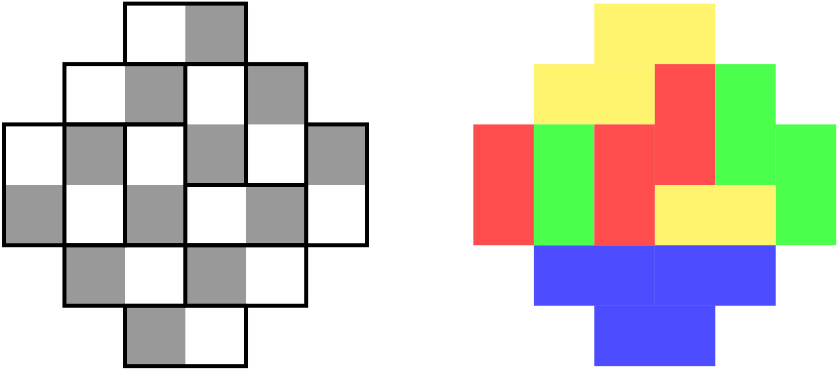
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Legfeljebb ennyi forgatással bármelyik csempézésből megkapható a minimális, és bármelyik csempézés megkapható a minimálisból legfeljebb ennyi lépésben.

# Dominók színezése



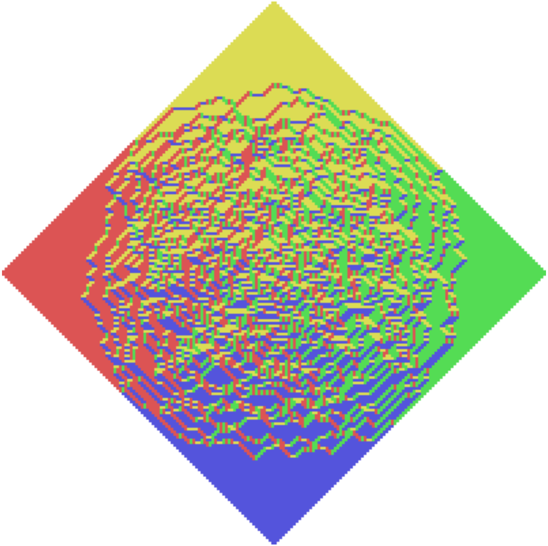
# Sarkkör-tétel ($n = 3$)



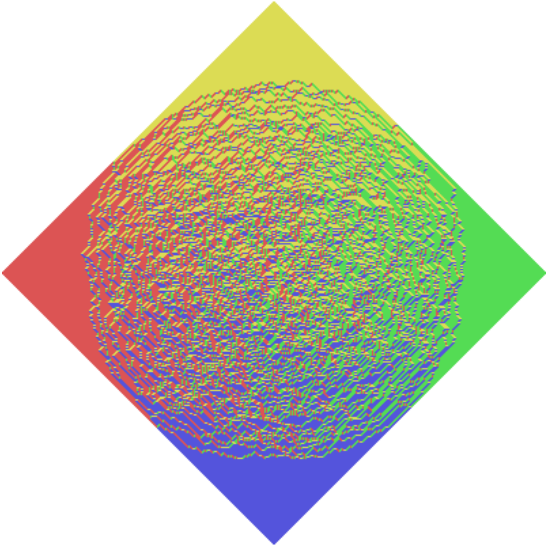
A következő ábrák Tihanyi Balázs programjával készültek.

http://users.hszk.bme.hu/~tb649/diamond/

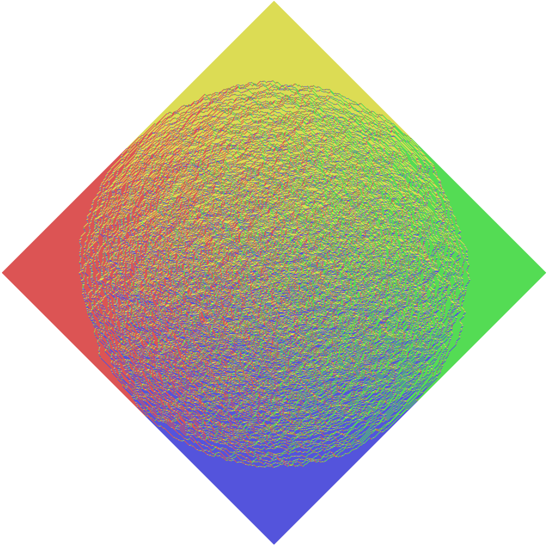
# Sarkkör-tétel ($n = 100$)



# Sarkkör-tétel ($n = 200$)



# Sarkkör-tétel ($n = 500$)



# Miből tanuljunk programozni?

▷ Szlávi Péter, Zsakó László

Módszeres programozás

▷ R. Rivest, T. Cormen, C. Leiserson

Új algoritmusok

▷ A. Engel

Exploring Mathematics with your Computer

▷ Introduction to Programming in Java

`http://introcs.cs.princeton.edu/java/home/`

▷ Project Euler

`http://projecteuler.net`

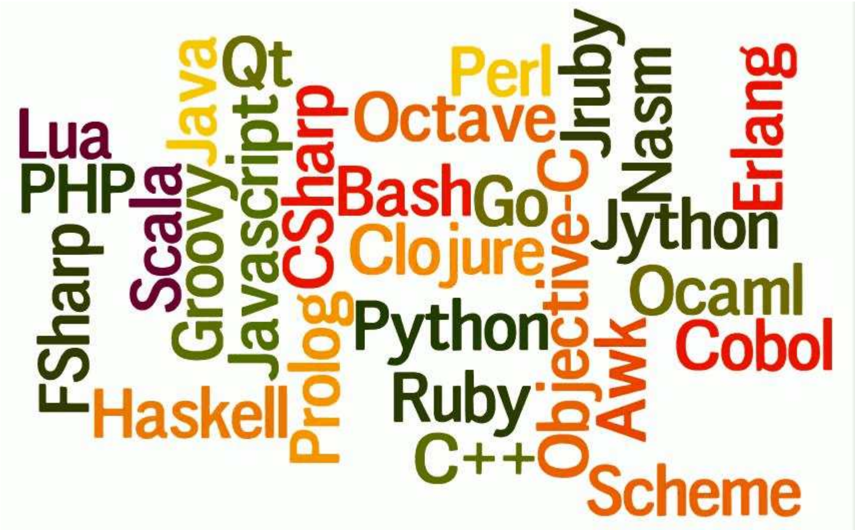
▷ Code Jam

`http://code.google.com/codejam/contests.html`

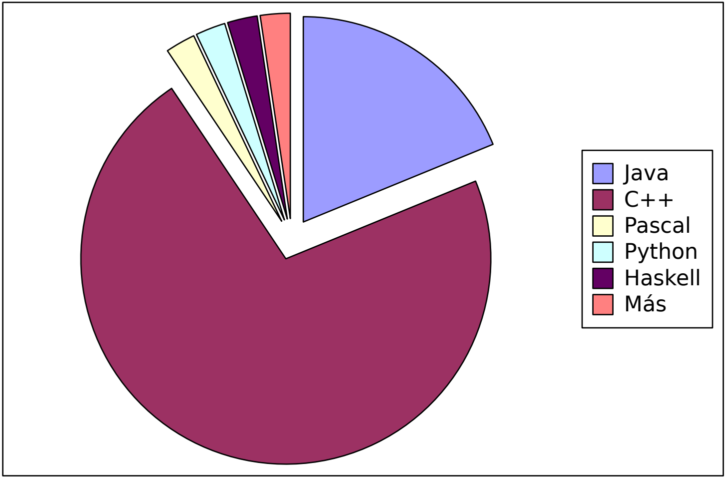
▷ Algoritmus szakkör

`http://prog.berzsenyi.hu:8080/prog`

# Programozási nyelvek



# Code Jam 2011 TOP 20%



# Házi feladat

Köszönöm a figyelmet!