Mitől realisztikus egy matematikai probléma?

Szöveges feladatok szerepe az általános iskolai matematikaoktatásban

Csíkos Csaba

Szegedi Tudományegyetem, Bölcsészettudományi Kar,

Neveléstudományi Intézet

Előadásvázlat

- Milyen előnyöket biztosíthat közoktatásunk számára a realisztikus matematikai szemléletmód?
- Miként tesztelhető a realisztikus matematikai tudás?
  - A holland realisztikus matematikai mozgalom
  - Példák nemzetközi és hazai vizsgálatokból
- A matematikai szöveges feladatok iskolai funkciói

A realisztikus megközelítésmód fontossága

- PISA és TIMSS felmérések tudásfogalma
- A „tradicionális” és „realisztikus” megközelítésmód összehasonlítása az eredményesség szempontjából

A PISA tudásfelfogása

- Matematikai kulturális eszköztudás, matematikai műveltség
  - az egyén képes legyen arra, hogy felismerje és megértse a matematika szerepét a világban
  - használja matematikai tudását az életben felmerülő szükségleteknek megfelelően
  - a matematikai eszköztudásnak több szintje van, attól függően, hogy a matematikai tudás felhasználása során a tanuló milyen szintű elemzésre, következtetéses gondolkodásra és kommunikációra képes
- „the PISA assessment focuses on real-world problems” vagyis „a PISA felmérés a valós életből vett problémákra épül”

A TIMSS tudásfelfogása

- A TIMSS 2007 felmérés algebrai részterületének meghatározásánál találjuk a következőt: „they should be able to solve real-world problems”, vagyis „meg kell(ene) tudniuk oldani valós életből vett problémákat”

A „tradicionális” és a „realisztikus” szemléletmód összehasonlítása

- A holland „háború”
  - Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappe [Royal Dutch Academia of Sciences] (2009). *Rekenonderwijs op de Basisschool. Analyse en Sleutels tot Verbetering*. [Mathematics education in the elementary school. Analysis and keys to improvement.] Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Amsterdam.
- „in general, the relationship between mathematical instructional approaches (namely, traditional and realistic approaches) and mathematical proficiency has not been unequivocally evidenced.”

A holland realisztikus matematikai mozgalom

- Hetvenes évek válasza két korábbi irányzatra
  - Új Matematika
    - Halmazok, számrendszerek
    - Bourbaki: 1935-től szigorú, halmazelméleti matematikai építkezés
    - Dieudonné: Euklidesznek mennie kell!
  - Mechanikus matematika
    - Drillízű gyakorlatok sorozata

A Freudenthal Intézet

- 1971 óta
- Matematika mint emberi tevékenység
- A tanulóknak lehetőséget adni arra, hogy megfelelő irányítás mellett tevékenység közben „újra-felfedezzék” a matematikát

Félreértések a „realisztikus” jelző körül

- Hollandul: „zich realiseren” azt jelenti: elképzelni
- Nem csak a valóságos jelenségek elképzelését jelenti, hanem a fantáziavilág, a mesék szereplői is felbukkanhatnak realisztikus feladatokban

Streefland hozzájárulása

- A realisztikus matematikai mozgalom középpontjában állnak a szöveges feladatok
- A szöveges feladatok ne matematikai műveletek gyakorlóterepei legyenek, hanem a matematikai megértés elősegítői
- „model of” helyett „model for”
  - Matematikai modellje valaminek ↔ matematikai modell valamihez

Mitől realisztikus egy matematikai probléma? – A kérdés megközelítésének két axiómája

- 1. axióma: (Realisztikus) szöveges feladatok tulajdonságain keresztül értelmezhető a realisztikusság
- 2. axióma: A realisztikusság NEM kizárólag a feladat jellemzője, hanem nagymértékben a feladat és a feladatmegoldó közötti viszonyé

Szöveges feladatok kategóriái a realisztikusság szempontjából

- Formális utasítás vagy matematikai fogalmakat és szimbólumokat összekapcsoló szöveg
- „Szövegbe öltöztetett matematikai struktúra”
- Realisztikus feladat
- Autentikus feladat

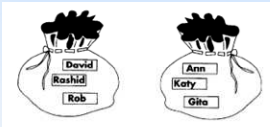
Szöveges feladatok kategóriái a realisztikusság szempontjából

- Formális utasítás vagy matematikai fogalmakat és szimbólumokat összekapcsoló szöveg
- „Szövegbe öltöztetett matematikai struktúra”

- Realisztikus feladat
- Autentikus feladat

Példa ál-realisztikus feladatra

Dávid és Gitta csoportja teniszversenyt szervez vegyespárosok részvételével, vagyis egy fiú és egy lány alkot egy párt. A három fiúnevet egy zacskóba tették, a három lánynevet pedig egy másikba.



Találd meg az összes lehetséges megoldást, ahogyan a fiúk és lányok párba állíthatók! Írd ide le a párokat. Egy párt már fel is írtunk:

Rob és Katy

The Tennis item. Source: Cooper and Dunne, 1998, p. 132.

Realisztikus (?) feladat

Egy irodaházban ez a felirat található a liftben:

A lift 14 embert szállíthat.

A reggeli csúcsforgalomban 269 ember akar felmenni a lifttel. Hány csoportban férnek be a liftbe ezek az emberek?

Realisztikus feladat

Illinois Állam matematikatesztjének egyik feladata:

Kathy 40 cent értékben vásárolt földimogyorót. June 8 uncia földimogyorót vett. Melyik lány vett több földimogyorót?

a) June
b) Ugyanannyit vásároltak
c) Kathy kétszer annyit vásárolt
d) Kathy egy unciával többet vásárolt
e) Nem lehet eldönteni

A 10 literes kerti locsolóban 6 liter víz van. Mennyi víz lesz benne, ha még 6 litert öntünk bele? 10+6+6=22 liter víz van benne.

Autentikus feladatok háromféle értelmezése

1. Valós, a gyermek számára autentikus problémahelyzetek szöveges emulációja
2. A megoldási út nem ismert a problémamegoldó előtt
3. Autentikus tevékenység: a feladat hozzáillesztése egy valós problémahelyzethez

Példa autentikus feladatra az amerikai NCTM tantervi ajánlásából

- Hasonlítsd össze, hogy melyik papírrepülő repül messzebbre: az, amelyiket puha fénymásolópapírból készítesz, vagy az, amelyiket ugyanolyan méretű kemény kartonpapírból! Mindkét repülőt ugyanazzal a hajtogatási technikával készítsd!

További példák realisztikus feladatokra

- Bálint és Aliz ugyanabba az iskolába járnak. Bálint 17 kilométerre lakik az iskolától, Aliz pedig 8 kilométerre. Hány kilométerre lakik egymástól Bálint és Aliz?
- Nagypapa a 4 unokájának egy dobozban 18 léggömböt ad, amit az unokák egyenlően osztanak szét. Hány léggömböt kap egy-egy unoka?
- Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek ,hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hány barát volt ott a partin?

Tanulságok

- Szocio-matematikai normák
- Társadalmi és nemek közötti egyenlőtlenségek

A szöveges feladatok típusai történeti szempontból

- Az ókortól kezdve a szöveges feladatok három szerepköre figyelhető meg:
  - matematikai művelet szövegbe öltöztetése, amikor a számolási és más műveleti készségek gyakoroltatása a cél
  - a valóság matematikai modellezése, amikor a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése a cél
  - rekreációs szerepe, amikor rejtvény jellegű vagy becsapós egy feladat

Ókori Egyiptom, i.e. 2000 körül, Rhind-papirusz

- „Van hét ház; mindegyik házban van hét macska; mindegyik macska megöl hét egeret; mindegyik egér megevett hét kalász gabonát [más forrás szerint: hét szem árpát]; mindegyik kalászból hét *hekat*nyi gabona termett volna. Mennyi az itt felsorolt dolgok összege?"

Az ókori Babilónia

- A szöveges feladatok tartalma és az azokban szereplő adatok egy része valósághű és kézzelfogható volt, azonban például a munkatempóra vonatkozó adatoknál már különvált a matematikai szöveges feladatok világa és a fizikai-társadalmi valóság.

12. századi indiai kézirat, a Lilavati

- „Ha egy 16 éves rabszolganő 32 *niská*ba kerül, mennyibe kerül egy 20 éves?”

13. századi kínai kézirat, a Shu-shu Chiu-chang

- „Hét ember 8 íjat készít el 9 nap alatt. Hány napig tart 225 embernek elkészítenie 10 000 íjat?”

Velencei Köztársaság, 1478, Arte dell’Abbaco

- Gyakorlati (kereskedelmi, pénzügyi) igényeket elégít ki
- Megjelenik benne az egyenes arányosságra épülő, külső és belső tagok szorzatának egyenlőségét használó számítás
- Hangsúlyt fektet a miért?-re, vagyis annak magyarázatára, hogy miért helyes egy eljárás

Hány éves a kapitány?

- „Mivel geometriát és trigonometriát tanulsz, egy feladatot adok neked. Egy hajó szeli át az óceánt. Bostonból indult, és gyapjút szállít, ami 200 tonna. Le Havre-be megy. A főárboc eltörött, egy hajósinas áll a fedélzeten, összesen 12 utas van a hajón, a szél kelet-északkeleti irányból fúj, az óra pedig délután negyed négyet mutat. Május van. Hány éves a kapitány?” (részlet Flaubert leveléből, amelyet matematikát tanuló testvéréhez intézett)

Hazai szöveges feladatok az 50-es és 70-es évekből

- „Békeívre aláírásokat gyűjt 2 pajtás...”
- Egy Koreába érkezett angol hadosztály létszáma 16 450 katona volt…
- „Gabiék őrse 1 q papír gyűjtését vállalta. 47 kg-nál tartanak. Mennyit kell még gyűjteniük?”
- *Milyen mértékben függ((het(ne)) a szöveges feladatok tartalma a politikai változásoktól?*

Grenoble-i kutatások, 1980

- „26 birka és 10 kecske utazik egy hajón. Hány éves a kapitány?”
  - Első és második osztályos tanulók „túlnyomó többsége” megoldotta a feladatot
- 125 birkát terel 5 pásztorkutya. Hány éves a juhász?
  - „125+5=130 ... ez túl nagy, és 125-5=120 is még mindig túl nagy... azonban ... 125:5=25 ... ez már működik. Szerintem a juhász 25 éves.”
  - A 7-9 éves gyerekek 12%-a, a 9-11 éves gyerekek 62%-a nyilatkozott úgy, hogy nem lehetett megfelelő választ adni a feladatra.

Tanári szemszögből

- A szöveges feladatok funkciói egyszerre, egymást segítve lehetnek jelen az osztályteremben
- Lehetőség a saját gondolkodási folyamatok jobb megismerésére (metakognitív tervezés, nyomon követés és értékelés)
- Hogyan különböztessük meg egymástól a különböző funkciójú feladatokat?
- Eredményes hazai fejlesztő kísérletek 3. és 4. osztályos tanulók körében

1. fejlesztő kísérletünk

Kutatótársak: Molnár Éva, Tarkó Klára, Zsigmond István

- Békés megyei iskolákban, 4. osztályban, a matematika és az olvasás 15-15 tanóráján
- Tartalomba ágyazott képességfejlesztés
- Tantermi órákba ágyazott fejlesztés
- Cél: a metakognitív stratégiák fejlesztése, felszabadítása és ehhez
  - Eszköz: metakognitív stratégiák használatát segítő feladatok
  - Stratégia: minimális fejlesztő beavatkozás

A matematikai fejlesztő program 3. órája

A következő feladatokat csoportmunkában oldják meg a tanulók. Emeljük ki, hogy mindenki önállóan számoljon, csak a végeredményt beszéljék meg, de azt alaposan! Nézzék meg, a valóságban elképzelhető-e az az eredmény!

irreális végeredmények

Nagypapa 18 léggömböt talált a fiókban. Szeretné egyenlően elosztani a 4 unokája között. Mit tegyen?

Egy edényben 80 °C-os víz van, a másikban 40 °C-os. Összeöntjük az edények tartalmát egy harmadikba. Hány fokos lesz a víz az összeöntés után?

Az osztályteremben 20 fok van, kint a szabadban 15. Ha kinyitjuk a szünetben az ablakot, hány fokos lesz utána a levegő hőmérséklete az osztályteremben?

Laci 4 db 2,5 méter hosszú deszkát vásárolt. Hány darab 1 méteres darabot tud ezekből lefűrészelni?

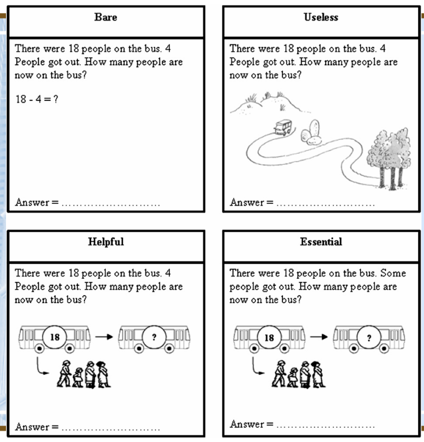
2. fejlesztő kísérletünk

Kutatótársak: Szitányi Judit és Kelemen Rita

- Budapesti, 3. osztályos tanulók körében
- 20 tanítási óra
- Cél: A szöveges feladatok megoldásakor készített rajzok szerepének megtanítása

Rajzok használata – tanári szemszögből

- Cai és Lester (2005) kínai és USA-beli tanárokat hasonlították össze
  - A kínai tanárok gyakrabban alkalmaztak rajzos magyarázatot
- Berends és van Lieshout (2008) négy rajztípust különböztetnek meg a szöveges feladatok megoldása szempontjából:

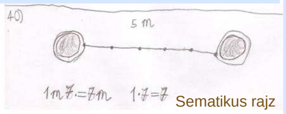


Kísérletünk céljai

- Ökológiai validitás biztosítása
  - 20 tanítási órára kiterjedően, olyan időszakban, amikor a kontroll osztályokban is ezt a témát tanítják
- Realisztikus szöveges feladatok szerepeltetése, amelyek szövegében hétköznapi helyzetekből merítünk, de nem „autentikusak”
- Vizuális reprezentációk fölhasználása
  - Tanulói meggyőződések alakítása a rajzok szerepéről
  - Többféle rajz bemutatása, amelyek a problémahelyzet különféle modelljeit jelentik
  - Megerősítést nyújtani a tanulóknak, hogy olyan rajzokat használjanak, amelyek egyéni jellemzőikhez igazodva elősegítik a problémamegoldást

Piktoriális rajz

„Két fa között, amelyek egymástól 5 m távolságra vannak, kötelet szeretnénk kifeszíteni. Sajnos, csak 1 m hosszú kötéldarabok vannak. Hányat kell ezekből egymáshoz kötözni?”



Sematikus rajz

Most folyó kutatásaim

1. Tanulásra vonatkozó meggyőződések vizsgálata
   - Általános meggyőződések
   - Matematikai meggyőződések
2. Adaptív problémamegoldó stratégiák vizsgálata
   - Hogyan „kell” kétjegyű számokat fejben összeadni?

Írásaim a témakörben

- Csíkos, C., Kelemen, R. & Verschaffel, L. (2011, in press). Fifth-grade students’ approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, DOI: 10.1007/s11858-011-0308-7*
- Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia*, 110, 149-166.
- Csíkos Csaba és Kelemen Rita (2009): Matematikai szöveges feladatok nehézségének és érdekességének megítélése 5. osztályos tanulók körében. *Iskolakultúra*, 3-4. sz., 14-25.
- Kelemen Rita, Csíkos Csaba és Steklács János (2005): A matematikai problémamegoldást kísérő metakognitív stratégiák vizsgálata a hangosan gondolkodtatás és a videomegfigyelés eszközeivel. *Magyar Pedagógia*, 105, 343-358.
- Csíkos Csaba (2005): Metakognícióra alapozott fejlesztő kísérlet 4. osztályos tanulók körében a matematika és az olvasás területén. *Magyar Pedagógia*, 105, 127-152.
- Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, 103, 35-55.
- Csíkos Csaba (2002): Hány éves a kapitány? Matematikai szöveges feladatok megértése. *Iskolakultúra*, 12. sz., 10-16.
- Csíkos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.) *Tanulmányok a neveléstudomány köréből*. Osiris Kiadó, Budapest, 355-372.

Köszönöm a figyelmet!

- www.staff.u.-szeged.hu/~csikoscs
- csikoscs@edpsy.u-szeged.hu