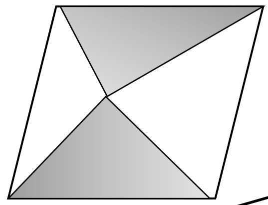
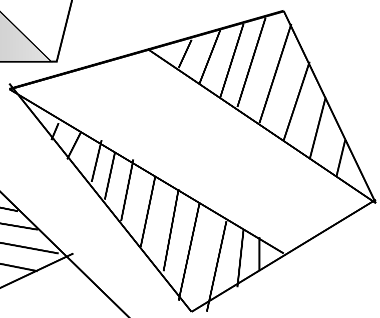
Feladatok

I. Klasszikus, bevezető feladatok

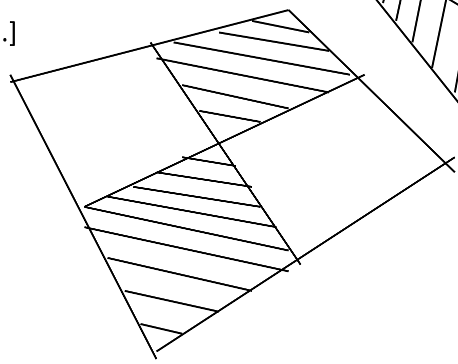
1. Az alábbi feladatokban hányad része a satírozott rész területe az eredeti négyszög területének?
   a) Egy paralelogramma valamely belső pontját összekötjük a csúcsokkal. [1.]



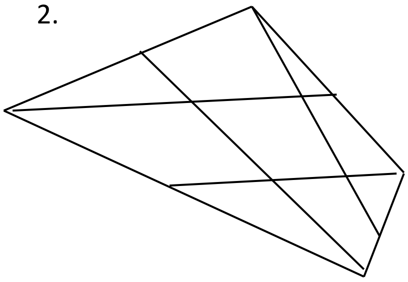
   b) Egy konvex négyszög két csúcsát kötjük össze az ábrának megfelelően az oldalfelező pontokkal. [1.]



   c) Behúzzuk egy négyszög középvonalait. [1.]



2.



Összekötjük egy négyszög csúcsait az ábrának megfelelően az oldalak felezőpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az oldalaknál keletkezett négy kis háromszög területének az összege egyenlő a középső négyszög területével!

3. Húzzuk be egy trapéz két átlóját, ezzel a trapézt négy háromszögre bontjuk. Bizonyítsuk be, hogy a száraknál keletkező két háromszög területe egyenlő![1.]
4. Behúzzuk egy konvex négyszög két átlóját, ezzel a négyszöget négy háromszögre bontjuk. Igaz-e, hogy ha valamely két szemközti oldalhoz tartozó háromszög területe egyenlő, akkor a négyszög trapéz?
5. Az ABCD trapéz AB, ill. CD alapján felvesszük a P és Q pontokat. A PD és QA szakaszok metszéspontja legyen R, a PC és QB szakaszoké S! Bizonyítsuk be, hogy a PSQR négyszög területe egyenlő az ARD és BCS háromszögek területének összegével! [1.]

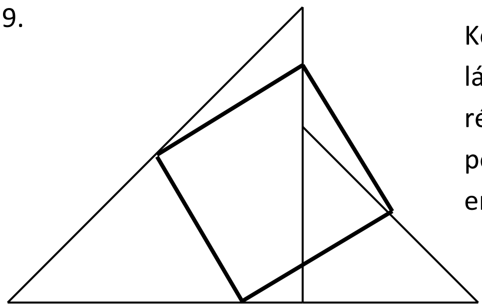
II. Versenyfeladatok

1. Az ABC háromszög területe 4 egység. Meghosszabbítjuk az AB oldalát a B-n túl az AB szakasz felével, így kapjuk a P pontot, a BC a C-n túl a saját felével, így kapjuk a Q pontot és a CA oldalt az A-n túl a CA felével, így megkapjuk az R pontot. Mekkora a PQR háromszög területe? [4.]

2. Adott az ABCD konvex négyszög, melynek területe T. Jelölje E, F, G, H rendre az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontját! Adjuk meg az ABF, BCG, CDH, ADE háromszögek területének az összegét! [5.] (I. 1./b)
3. Az ABCD négyszög AB oldalát a B-n túl meghosszabbítjuk az AB szakasszal, így kapjuk a P pontot, a BC a C-n túl a BC-vel, így kapjuk a Q pontot, a CD oldalt a D-n túl a CD-vel, így megkapjuk az R pontot, végül a DA-t az A-n túl DA-val, így az S ponthoz jutunk. Hányszorosa a PQRS négyszög területe az ABCD négyszög területének?

4. Egy háromszög egyik oldala 26 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala 20 cm, ill. 36 cm. Mekkora a háromszög területe?

5. Az ABCD konvex négyszög AB oldalának felezőpontja F, BC oldaláé G, CD oldaláé H, míg DA oldaláé I. AZ AG és CF szakasz metszéspontja legyen K míg az AH és CI szakaszé L. Hányad része az AKCL négyszög területe az ABCD négyszög területének?

6. Egy rombusz egyik átlója kétszerese a másik átlójának. Elforgatjuk 90°-kal a rombuszt az átlóinak metszéspontja körül. Hányadrésze a két rombusz metszetének területe a rombusz területének?
7. Egy négyzet minden csúcsát összekötjük az azt nem tartalmazó oldalak felezőpontjával, így a négyzet közepén keletkezik egy nyolcszög. Hányad része a négyzet területének a nyolcszög területe?
8. Számítsuk ki egy háromszög és a súlyvonalaiból szerkesztett háromszög területének az arányát! [4.]
9. 

Két egyenlő szárú derékszögű háromszöget az ábrán látható módon egymáshoz illesztettünk. Hányad része az így kialakuló konkáv négyszög oldalfelezési pontjai által meghatározott négyszög területe az eredeti négyszög területének! [6.]

10. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! A paralelogramma területe hányad része a négyszög területének? [9.] (Pierre Varignon tétele 1731.)

11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex négyszög átdarabolható paralelogrammává!

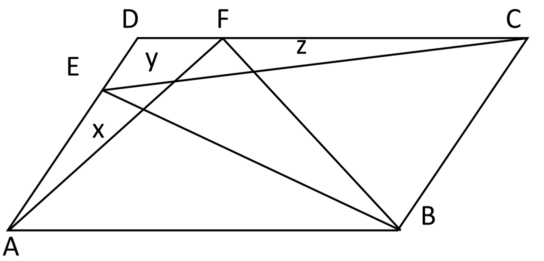
12. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszög területét mindkét középvonala felezi, akkor a négyszög paralelogramma! [2.]
13. Az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja legyen H. Milyen arányban osztja az A csúcsból induló súlyvonal és a CH szakasz egymást?(Más formában [5.])

14. Az ABC háromszög A-hoz közelebbi negyedelő pontja legyen N, a BC oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja G! Milyen arányban osztja egymást a CN és az AG szakasz?

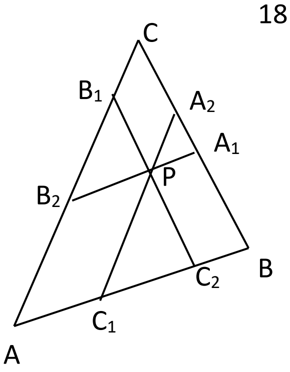
15. Az előző feladatot egészítsük ki azzal, hogy felvesszük az AC oldal C-hez közelebbi negyedelő pontját, ami legyen L. A CN, AG és BL szakaszok páronkénti metszéspontja meghatároz egy háromszöget. Hányad része ezen háromszög területe az ABC háromszög területének?

16. Az *ABC* háromszög *BC* oldalát a *D* pont *BD* : *DC* = 1 : 3 arányban osztja, míg az *O* pont az *AD* szakaszt *AO* : *OD* = 5 : 2 arányban osztja. Milyen arányban osztja a *BO* egyenes az *AC* oldalt? [6.] Az AD átmérőjű félkör ívét a B és C pontok három egyenlő hosszú ívre bontják. Mekkora az AB, AC húrok és a BC ív által határolt síkidom területe, ha a félkör területe T?[4.]

17.



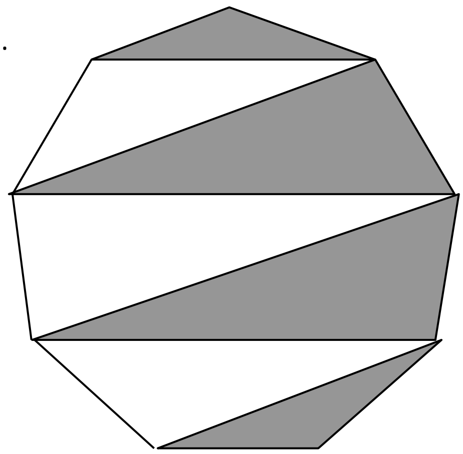
Az ABCD paralelogramma DC oldalának egy tetszőleges pontja legyen F, az AD oldalának tetszőleges pontja E! Az ABF és a CEB háromszögek területének közös része hányadrésze az ábrán x, y, z-vel jelölt részek területösszegének? (I. 1./a)



18. Az ABC háromszög belső P pontján keresztül az oldalakkal párhuzamosokat húzunk. Az ábrán jelöltük a párhuzamosok oldalakkal vett metszés pontjait. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe egyenlő az $A_2B_2C_2$ háromszög területével! [4.] (I. 1./a)

19. Az előző feladat háromszögében húzzuk be az AA_1 a BB_1 és a CC_1 szakaszokat. Ezek létrehoznak a háromszög közepén és az ABC háromszög csúcsainál egy-egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ezen utóbbi háromszögek területének összege egyenlő a középső háromszög területével!

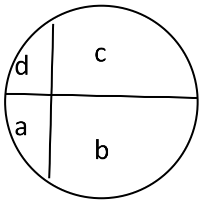
20.



Egy szabályos 9-szöget 6 átlónak az ábrán látható módon történő behúzásával felosztottunk háromszögekre. Melyik terület a nagyobb: a satírozott, vagy az üres? [6.] (I. 3.)

21. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja A_1. Legyenek B_1 az AC , ill. C_1 az AB oldalegyenesnek olyan pontjai, hogy AA_1, BB_1, és CC_1 szakaszok párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe kétszerese az ABC háromszög területének! [5.] (I. 3.)

22. Az AD átmérőjű félkör ívét a B és C pontok három egyenlő hosszú ívre bontják. Mekkora az AB, AC húrok és a BC ív által határolt síkidom területe, ha a félkör területe T?[4.]

23. 

Egy 3 cm sugarú kör belsejében felvettünk két merőleges húrt, melyek közül az egyik 2 cm, a másik 1 cm távolságra van a kör középpontjától. A keletkezett négy rész területét az ábra szerint a, b, c, d-vel jelöltük. Határozzuk meg a (a+c)-(b+d) értékét! [3.]

24. Egy háromszög egyik oldalán adott egy pont. Szerkesszünk ezen a ponton keresztül olyan egyenest, amely felezi a háromszög területét! [1.] (I. 3)

25. Egy konvex négyszög egyik csúcsán keresztül szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a négyszög területét! [1.] (I. 3.)

26. Rajzoljunk egy háromszög egyik oldala fölé kifelé egy tetszés szerinti körívet! Ennek felezőpontjából szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a háromszögből és a körszeletből álló idom területét! [5.] (I. 3.)

27. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalára kifelé emeltük a BCDE négyzetet. Legyen F a DE oldal felezőpontja. Szerkesszünk F-en át olyan egyenest, amely felezi az ABEDC ötszög területét! [5.] (I. 3.)

28. Adott egy konvex szögtartomány belsejében egy pont. Szerkesszünk olyan egyenest, amely keresztülmegy a ponton és a legkisebb területű háromszöget vágja le a szögtartományból! (I. 1/a)

29. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint ugyanezen az oldalon egy tetszőleges pontnak a másik két oldaltól mért távolságainak az összege! [3.]

30. Egy negyedkörbe téglalapot írunk, melynek egyik csúcsa körívre, egy-egy csúcsa a határoló sugarakra, a negyedik csúcsa kör középpontjába illeszkedik. Az ilyen téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? [3.]

31. Az ABCD négyzet belsejében levő P pontra igaz, hogy APB =90° és PB-PA=2. Számítsuk ki P-nek a négyzet középpontjától mért távolságát!

32. Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszögben a befogók összege kisebb az átfogó és a hozzátartozó magasság összegénél![3.]

III. A jövő (középiskolai feladatok)

1. *Az *ABCD* konvex négyszög *AB* és *CD* oldalegyenesei az *E* pontban metszik egymást. Az *AC* átló felezőpontja *F*, a *BD* átló felezőpontja *G*. Hogyan aránylik egymáshoz az *FEG* háromszög és az *ABCD* négyszög területe? [7.] [8.] (Varignon-problémakör)

2. ***** Az *ABC* háromszög *B* és *C* csúcsaira illeszkedő kör az *AB* oldalt *D*-ben, az *AC* oldalt *E*-ben metszi. A *BC* oldal felezőpontja *F*, az *AF* és *DE* szakaszok metszéspontja *G*. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{GD}{GE}=\frac{AC^2}{AB^2}$. [7.]

3. *Az ABC Δ C-ből induló belső szögfelezője a B-ből induló súlyvonalat a P, az AB oldalt pedig a T pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $\frac{CP}{PT}-\frac{AC}{BC}=1$![6.]

4. Egy négyszög két szemközti oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontokat kössük össze! Bizonyítsuk be, hogy az így kapott n db diszjunk belsővel rendelkező négyszög területe számtani sorozatot alkot!

5. *Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd kössük össze a szemközti oldalakon levő megfelelő osztópontokat! Válasszunk ki az így keletkező n^2 négyszög közül n db-ot úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen azonos sávban. Bizonyítsuk be, hogy ezen négyszögek területének összege egyenlő az eredeti négyszög területének az n-ed részével! [2.]

6. * Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a C', a BC oldalán az A' és a CA oldalán a B' pontot, majd megrajzoljuk az AA', BB', CC' szakaszokat, melyek a háromszöget négy kis háromszögre és három négyszögre bontják. Hogyan kell felvenni az A', B', C' pontokat, hogy a négy kis háromszög területe egyenlő legyen? Bizonyítsuk be, hogy ekkor a négyszögek területe is egyenlő! Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi egy háromszög kerületét és területét is!

7. *Adott egy konvex sokszög. Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a sokszög területét! [2.]
8. *Egy háromszög adott pontján keresztül szerkesszünk olyan egyeneseket, melyek harmadolják a háromszög területét! [2.]
9. Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi egy háromszög kerületét és területét is!

A feladatok forrása:

[1.] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből
[2.] KöMaL
[3.] Varga Tamás Matematikaverseny
[4.] Kalmár László Matematikaverseny
[5.] Bátaszéki Matematikaverseny
[6.] Schultz János
[7.] Szőkefalvi-Nagy Gyula Emlékverseny
[8.] Coxeter-Greitzer: Újra felfedezett matematika