

Érdekes szakköri feladatok általános iskolásoknak

- Az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis?
 - Van három olyan egész szám, amelyek összege páratlan, szorzatuk páratlan.
 - Van három olyan egész szám, amelyek összege páratlan, szorzatuk páros.
 - Van három olyan egész szám, amelyek összege páros, szorzatuk páratlan.
- Fel lehet-e bontani az 1, 2, 3, ... , 2009, 2010 számokat két csoportra úgy, hogy mindkét csoportban páratlan legyen a számok összege?
- Keress hét olyan egymást követő pozitív egész számot, amelyek két csoportba oszthatók úgy, hogy az egyik csoportba tartozó számok összege ugyanannyi legyen, mint a másik csoportba tartozóké! Van-e hat ilyen tulajdonságú, egymást követő pozitív egész?
- Hét egész szám összege nulla. Lehet-e a szorzatuk páros?
- Lehet-e 9 egész szám összege és szorzat is 9?
 - Lehet-e 10 egész szám összege és szorzat is 10?
 - Lehet-e 8 egész szám összege és szorzat is 8?
- Bizonyítsuk be, hogy az \overline{ab} alakú szám pontosan akkor osztható héttel, ha az $a - 2b$ is osztható héttel!
- Határozzuk meg azokat a négyjegyű 9-re végződő számokat, amelyek oszthatók számjegyeik mindegyikével?
♣♣♣
- Adjuk össze a 2, 5, 8, ... számtani sorozat első 2010 tagjának a négyzetét. Mi lesz az összeg utolsó számjegye?
- Melyik az a legkisebb négyzetszám, amelynek
 - a számjegyösszege 2010;
 - az utolsó négy számjegye 2010;
 - az utolsó négy számjegye 2011;
 - az utolsó négy számjegye 2012?
- Hogyan rendezhetők egy sorba az 1-től 16-ig terjedő egész számok úgy, hogy bármely két szomszédos szám összege négyzetszám legyen?
♣♣♣
- Melyik az a legkisebb négyesre végződő pozitív egész, amelyben ha az utolsó számjegyét (4) a szám elejére áttesszük, akkor az eredeti szám négyszeresét kapjuk?
- Bizonyítsuk be, hogy minden $\overline{abc4}$ alakú szám (a, b, c számjegyek) osztható 143-mal!
- Gondolj egy háromjegyű számot, szorozd meg 473-mal, majd mondd meg a szorzat három utolsó számjegyét! Ennek ismeretében én egy zsebszámológép segítségével néhány másodperc alatt kitalálom az általad gondolt számot. Hogyan?
- Felírható-e a 2011 két prímszám összegeként?
♣♣♣
- Egy 5×5 -ös négyzet alakú táblázat minden mezőjébe az 1 vagy a -1 szám valamelyikét írjuk. Minden oszlop alá odairjuk az adott oszlopban szereplő számok szorzatát, és ugyanígy

minden sor mellé is odaírjuk adott sorban szereplő számok szorzatát. Mennyi az így nyert tíz szám szorzata? Igazold, hogy a tíz szám összege nem lehet nulla!

16. Az itt látható 3×3 -as bűvös négyzetben elhelyeztünk három számot. Határozd meg a felső sor hiányzó elemét! (Bűvös négyzet: a három sorban, a három oszlopban és a két átlóban álló számok összege azonos.)

	19	98
1		

17. Az alábbi számháromszögben melyik szám áll közvetlenül a 2010 alatt?

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
⋮

18. Hányszor fordul elő az 1-es számjegy az alábbi 2010 tagú összeg tízes számrendszerbeli alakjában?

$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 99}_{2010 \text{ db}}$$

♣♣♣

19. A következő sakktáblarészlet egyik mezőjére gondoltam. Minimum hány eldönthető (csak igennel, vagy nemmel megválaszolható) kérdéssel tudod kitalálni, hogy melyik mezőre gondoltam?

3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

20. Nekeresden olyan lottót játszanak, amelyben az 1, 2, ..., 32 számok közül egyet kell eltalálni. Minden vasárnap van sorsolás. Az üveghegyen túl lakik egy varázsló, aki ki tudja találni az adott héten kihúzandó számot. A varázslóval csak postagalamb útján lehet értekezni. Egy postagalamb hat nap alatt teszi meg az utat oda-vissza. A varázsló csak eldönthető kérdésekre hajlandó válaszolni, egy galamb csak egy kérdést vihet. Minimum hány postagalambot kell indítanunk, ha meg szeretnénk ismerni a következő nyerő számot? (Pósa Lajos)

21. A galambforgalom miatt egy sas költözik az üveghegy tetejére, aki minden héten elkap egy galambot. Most hány galambot küldjünk? (Pósa Lajos)

22. Gondolj egy 16-nál nem nagyobb pozitív egész számot! Eldönthető kérdéseket teszek fel. Minden kérdés elhangzása előtt egy dobókocka segítségével el kell döntened, hogy igazat mondasz (páros dobott szám esetén), vagy hazudsz (páratlan dobott szám esetén). Természetesen a dobások eredményét én nem ismerem. Ki tudom-e találni az általad gondolt számot? (Pósa Lajos)

23. Egy marék aprópénzt egymás mellé leraktunk az asztalra vegyesen fej, vagy írás lesz felül (például: FFIIFIFIIFI). Ketten játszunk a következő szabály szerint: Az első kiválaszt egy olyan érmét, amin fej van felül, és ezt, valamint a tőle jobbra lévő összes érmét megfordítja. A második játékos is ugyanígy tesz, és ismétlik az eljárást mindaddig, amíg minden érmén írás lesz felül. Az nyer aki ezt legelőször eléri (tehát a másik már nem tud forgatni, hiszen nem marad fej). Mi a nyerő stratégia? Végessok lépésben véget ér-e minden esetben a játék?

♣♣♣

24. Egy körvonalon felvesszünk 2010 darab kék és egy darab piros színű pontot. Vizsgáljuk az összes olyan sokszöget, amelynek minden csúcsa a felvett pontok közül való. A piros csúcsot tartalmazó, vagy a piros csúcsot nem tartalmazó sokszögből van több?

25. Száz darab kártyára felírtuk az első száz pozitív egészet (minden kártyára csak egy számot írva), majd beletettük egy dobozba. Anna kihúz egy kártyát, majd Balázs is egyet. Összeadják a kártyákon lévő számokat, ha az összeg páratlan, akkor Anna nyer, ha páros, akkor Balázs. Igazságos-e ez a játék? Mi a helyzet, ha Anna egy harmadik kártyát is kihúz, és a fenti szabályt alkalmazzák de most már a három kihúzott szám összegére?

26. Helyezzük el a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számokat tetszőleges sorrendben egy kör mentén. Bizonyítsuk be, hogy bármely sorrend esetén van három olyan a kör mentén egymás mellett lévő szám, amelyek összege legalább 15.

27. Egy tizenkilenc oldalú konvex sokszög minden szögének fokokban mért mérőszáma osztható 10-zel. Igazoljuk, hogy a sokszögnek van két párhuzamos oldala!

28. Tegyük fel, hogy bizonyos tárgyak közt van két különböző színű, továbbá van két különböző alakú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van a tárgyak között két olyan, amelyek színben is, alakban is különböznek!

♣♣♣

29. Sorban egymás mellé felállítottunk n darab kuglibábut. Két játékos felváltva feldönt egy bábut, vagy két szomszédos bábut. Az veszít, aki nem tud lépni (dönteni). Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

30. Körben felállítottunk n darab kuglibábut. Két játékos felváltva feldönt egy bábut, vagy két szomszédos bábut. Az veszít, aki nem tud lépni (dönteni). Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

31. Egy $n \times m$ -es csokoládétáblából ketten felváltva tördelnek le a rácsegyenesek mentén darabokat. Az nyer, aki először tud 1×1 -es darabot letörni. Kinek van nyerő stratégiája?

32. Egy tábla csokoládét a feldarabolás megkönnyítésére három vízszintes és öt függőleges bevágással 24 mezőre osztják. Fel szeretnék tördelni a csokoládét erre a 24 darabra a bevágások mentén. Egy töréssel csak egy darab egybefüggő részt törhetünk ketté. Mennyi a feldaraboláshoz szükséges törések minimális száma?

33. Egy dobozban p darab piros és q darab fekete golyó van, a dobozon kívül pedig egy halom fekete golyó. Kiveszünk a dobozból találmra két golyót. Ha egyforma színűek, akkor félretesszük őket, és helyettük egy fekete golyót bedobunk a dobozba. Ha különböző színűek, akkor a piros golyót visszatesszük, a feketét pedig a halomhoz rakjuk. Addig folytatjuk az eljárást, amíg egyetlen golyó marad a dobozban. Mi a valószínűsége, hogy ez a golyó piros?

♣♣♣

34. Pisti biciklivel ment a Tapolcai strandra. Hegynek felfelé átlagosan 8 km/h, vízszintes úton 12 km/h, lejtőn lefelé 24 km/h sebességgel tud haladni. A strand előtt jutott eszébe, hogy otthon felejtette a fürdőnadrágját, így azonnal visszafordult. Édesanyja meglepődve látta, hogy másfél órával az elindulása után máris hazaért. Milyen messze lakik Pisti a tapolcai strandtól?

35. Mama pogácsát sütött, és egy üzenő levélben kérte gyermekeit, hogy igazságosan osztozzanak rajta. Anna ért haza elsőként, megette a pogácsák harmadát, majd szakkörre ment. Béla ért haza másodikként, megette a maradék pogácsák harmadát, majd edzésre ment. Ezután ért haza Cili, aki szintén csak a tányéron maradt pogácsák harmadát ette meg, és így még 8 darab maradt.

Hány pogácsát evett meg Cili?

Hány pogácsát evett meg Béla?

Hány pogácsát sütött a mama?

Összeállította: Veres Pál (Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc)