

# Tanárverseny – 2010

## középiskolában tanító tanároknak



A verseny támogatói:

Typotex Kiadó

Maxim Kiadó

MATEGYE Alapítvány

A verseny időtartama 90 perc. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont jár; válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pontot adunk. A versenyen íróeszközön, papíron, körzön és vonalzón kívül semmilyen más segédeszköz nem használható. A verseny befejeztével csak a kódlapot kell beadni.

1. Mennyi  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  értéke?

- (A) 8                      (B) 5                      (C)  $\sqrt{5}+\sqrt{3}$                       (D)  $\sqrt{5}-\sqrt{3}$                       (E) 7

2. Mennyi a  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$  kifejezés értéke?

- (A)  $2\sqrt{2}-2$                       (B)  $10\sqrt{2}$                       (C) 2                      (D) 7                      (E) 14

3. Ha  $x < 0$ , akkor  $\left|x - \sqrt{(x-1)^2}\right| =$

- (A) 1                      (B)  $1-2x$                       (C)  $1+2x$                       (D)  $2x-1$   
(E) Előző válaszok egyike sem helyes.

4. Mennyi  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$  értéke?

- (A) 4                      (B) 5                      (C) 5,5                      (D) 6                      (E) 9

5. Mennyi az  $|x+1| + |x-2| + |x-3| + |x-7|$  kifejezés legkisebb értéke?

- (A) 7                      (B) 8                      (C) 9                      (D) 13                      (E) 17

6. Ha  $\frac{a+2b}{a-2b} = 3$ , akkor mennyi  $\frac{a+3b}{a-3b}$  értéke?

- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 7

7. Mennyi az 1591 prímosztóinak összege?

- (A) 70                      (B) 80                      (C) 90                      (D) 100                      (E) 110

8. Mennyi  $3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3+1)+1)+1)+1)+1)+1$  legnagyobb prímosztója?

- (A) 13                      (B) 37                      (C) 41                      (D) 101                      (E) 113

9. Legfeljebb hány nullára végződik a tízes számrendszerben felírt  $N$  szám, ha  $N=1^n+2^n+3^n+4^n$ , ahol  $n$  tetszőleges pozitív egész szám?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

10. Hány olyan egész szám van 100 és 200 között, melyek előállnak  $2^n-2^k$  alakban, ahol  $n$  és  $k$  pozitív egészek?

- (A) 4                      (B) 5                      (C) 6                      (D) 7                      (E) 8

11. A ~~88~~-as sakktabla fekete mezőire hányféleképp lehet feltenni 8 bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?

- (A) 24                      (B) 64                      (C) 512                      (D) 576                      (E) 720

12. Az  $n, n+3, n+4, n+5, n+6, n+8, n+10, n+12, n+15$  számok mediánja 10. Mennyi a számok átlaga?

- (A) 4                      (B) 6                      (C) 7                      (D) 10                      (E) 11

13. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, melyekben a számjegyek összege 43. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen szám 11-gyel osztható?

- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{1}{4}$                       (C)  $\frac{1}{5}$                       (D)  $\frac{1}{6}$                       (E)  $\frac{3}{13}$

14. Az 1000-nél kisebb páratlan természetes számok szorzata melyik műveletsorral egyezik meg?

- (A)  $\frac{1000}{(500)^2}$                       (B)  $\frac{1000}{2^{500}}$                       (C)  $\frac{999}{2^{500}}$                       (D)  $\frac{1000}{2^{500} \cdot 500}$                       (E)  $\frac{500}{2^{500}}$

15. Milyen maradékot ad a  $2^5+3^5+4^5+\dots+1^5$  összeg 12-vel osztva?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 6                      (D) 10                      (E) 11

16. Milyen maradékot ad az  $x^{17}+x^6-2x^2+1$  polinom  $(x-1)$ -gyel osztva?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

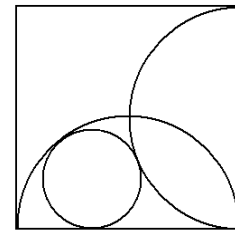
17. Az  $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$  egyenletnek az  $m$  valós értékű paraméter mely értékeire lesz két különböző valós gyöke?

- (A) Bármely  $m$  valós számra. (B) Bármely  $m \neq -1$  valós számra.  
 (C) Bármely  $m \neq 0$  valós számra. (D) Bármely  $m \geq 0$  valós számra.  
 (E) Előző válaszok egyike sem helyes.

18. Az  $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$  egyenlet két gyöke 2 és 3. Mennyi  $a - b$  értéke?

- (A) -5 (B) -1 (C) 1 (D) 5 (E) 11

19. Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala, mint átmérő fölé befele félköröket rajzolunk. Határozd meg az egyik félkört és a négyzetet belülről, a másik félkört kívülről érintő kör sugarát.



- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{4}{9}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{2}{5}$

20. Egy téglatest egyik csúcsából induló lapátlóinak hossza  $\sqrt{34}$ ,  $\sqrt{58}$  és  $\sqrt{74}$ . Mekkora a téglatest térfogata?

- (A) 105 (B) 162 (C) 225 (D) 315 (E) 498

21. Az  $ABC$  háromszögben  $AB=8$ ,  $AC=3$ ,  $\angle C=60^\circ$ , és az  $A$  csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a  $D$  pontban metszi. Mekkora a  $CD$  szakasz?

- (A)  $\frac{7}{11}$  (B) 1 (C) 2 (D)  $\frac{21}{11}$  (E)  $\frac{24}{11}$

22. Melyik az egyenlete az  $x^2 + y^2 = -4x$  és az  $x^2 + y^2 = 4y$  körök közös húrja egyenesének?

- (A)  $y = x$  (B)  $y = -x$  (C)  $y = 2x$  (D)  $y = -2x$  (E)  $y = 2$

23. Egy téglalap csúcsainak koordinátái:  $(0,0)$ ,  $(6,0)$ ,  $(6,4)$ ,  $(0,4)$ . Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely párhuzamos az  $y = 3x + 1$  egyenessel és felezi a téglalap területét?

- (A)  $y = 3x - 4$  (B)  $y = 3x - 5$  (C)  $y = 3x - 6$   
 (D)  $y = 3x - 7$  (E)  $y = 3x - 8$

24. Az  $f(x)$  függvény teljesíti az  $f(x)=1-f(x-1)$  összefüggést, ha  $x$  pozitív egész szám. Ha  $f(1)=2$ , akkor mennyi  $f(2011)$  értéke?

- (A)  $-1$                       (B)  $0$                       (C)  $1$                       (D)  $1005$                       (E)  $2010$

25. Legyen  $x_1=23$ ,  $x_2=\frac{2}{x_1}$ ,  $x_3=\frac{3}{x_2}$ ,  $x_4=\frac{4}{x_3}$ ,  $x_5=\frac{5}{x_4}$ ,  $x_6=\frac{6}{x_5}$ .

Mennyi  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$  értéke?

- (A)  $23$                       (B)  $48$                       (C)  $64$                       (D)  $1104$                       (E)  $16560$

26. Mennyi az  $f(x)=(x-5)^2+(x-7)^2-(x-4)^2-(x-8)^2+(x-3)^2+(x-9)^2$  polinom legkisebb értéke?

- (A)  $8$                       (B)  $10$                       (C)  $12$                       (D)  $14$   
(E) Előzőek egyike sem helyes.

27. Egy szám *ördögi szám*, ha 666-tal nagyobb számjegyei összegénél. Hány ördögi szám van?

- (A)  $0$                       (B)  $1$                       (C)  $9$                       (D)  $10$                       (E)  $666$

28. Hány olyan szám van 10 ezerig, melyben a számjegyek összege 10?

- (A)  $210$                       (B)  $219$                       (C)  $282$                       (D)  $306$                       (E)  $316$

29. Az  $a, b, c$  pozitív számokra  $\log b + \log c + \log a = 0$ .

Mennyi  $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$  értéke?

- (A)  $-1$                       (B)  $0$                       (C)  $1$                       (D)  $3$                       (E)  $6$

30. Mekkora az  $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-e)^2+(e-f)^2+(f-a)^2$  kifejezés legkisebb értéke, ha  $a, b, c, d, e$  és  $f$  különböző egész számok?

- (A)  $16$                       (B)  $18$                       (C)  $20$                       (D)  $24$                       (E)  $30$