Válogatás a Kvant feladataiból

Gondolom, hogy a tanulók,de talán a fiatalabb kollégák között sem nagyon ismert már a fizika-matematika feladatokat tartalmazó orosz Kvant folyóirat. Pedig különböző versenyeken és a KöMaL-ban is gyakran találkozhatunk Kvant-beli, vagy ahhoz nagyon hasonló feladattal. Foglalkozásom során erről fogok pár szót szólni és bemutatok pár önkényesen kiragadott példát.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.
2. Oldja meg a nem negatív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert: $x^3=2y^2-z, y^3=2z^2-x, z^3=2x^2-y$.
3. Igazolja, hogy ha a, b, c és $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ egészek, akkor $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ is egész.
4. Bizonyítsa be, hogy ha xy+z=yz+x=zx+y teljesül, akkor (x-y)(y-z)(z-x)=0.
5. Igazolja, hogy $2009^2+2009^2\cdot2010^2+2010^2$ négyzetszám.
6. Bizonyítsa be, hogy $2004\cdot2005\cdot2006\cdot2008\cdot2009\cdot2010+36$ négyzetszám.
7. Bizonyítsa be, hogy $2008\cdot2010^3-2009\cdot2007^3$ köbszám.
8. Az x, y valós számokra $x^3-3x^2+5x=1$, illetve $y^3-3y^2+5y=5$ teljesül. Mennyi x+y értéke.
9. Az alábbi sorozatokban $a_0=0$. Határozza meg a_{201} értékét.
   a., $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}(a_n+1)$.
   b., $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n+1)$.
   c., $a_{n+1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n+1)$.
10. Bizonyítsa be, hogy $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ összetett szám.

11. Oldja meg a nem negatív számok halmazán az $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$ egyenletet.

12. Az x, y, z pozitív valós számokra $x^2+y^2+z^2=1$ teljesül.

Bizonyítsa be, hogy $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert: $x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3,\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0$.

14. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

15. Igazolja, hogy

$$x^2\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)+y^2\left(y^2-z^2\right)\left(y^2-x^2\right)+z^2\left(z^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq 0$$

minden x, y, z valós számra.

16. Oldja meg az $x^3-13xy+y^3=13$ egyenletet, ahol x és y egészek.