

Gondolatok a konstans szélességű alakzatok kapcsán

speciális matematikai tagozat szekció

Kapcsolódási pont:

– Juhász Péter: Hogyan fordítsunk meg egy létrát az udvaron?

című előadása

Készítette: Magyar Zsolt

Szent István Gimnázium, Budapest

zsolt3.magyar@gmail.com

Bevezetés

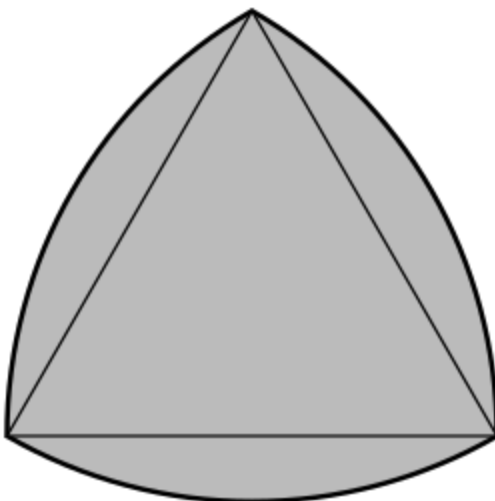
Juhász Péter érdekes előadást tartott a speciális matematika tagozatos szekcióban, amelyben az alapkérdés az volt:

Egy munkás egy nagyon hosszú létrával a hóna alatt áll az udvaron. Meg kellene fordulnia. Mekkora a legkisebb területű udvar, amin belül meg tud fordulni?

Az előadás első részében keresgeltünk különböző konvex alakzatokat, amelyekben a megfordulást meg lehet tenni. A felmerülő alakzatok közös tulajdonsága volt, hogy a belsejében el kellett férjen a mozgató során egy adott hosszúságú szakasz („a létra”). Az alakzatok között szerepelt körlap, íves háromszög, szabályos háromszög, körgyűrű, egy Y-fordulóra alkalmas konkáv ívekből álló háromszögszerű alakzat, hipociklois. A probléma általánosítása a Kakeya-féle túproblémához vezetett, amelyben már azt keressük, hogy mi a minimális területű ponthalmaz a síkban, amelyben egy egység hosszúságú szakaszt meg lehet fordítani 360° -kal?

Az előadás nagyon érdekes volt, és rögtön eszembe jutott az íves háromszögről, hogy ennek nemcsak a belsejében, hanem a külső részén is érdekes tulajdonságokat fedezhetünk fel. Így a dolgozatomban megpróbálom körbejárni az íves háromszög, szakmai nevén Reuleaux-háromszög tulajdonságait, az ezzel kapcsolatban felmerülő kérdéseket, és az ehhez kapcsolódó, illetve ebből kiinduló gyakorlati alkalmazásokat.

A Reuleaux-háromszög



A Reuleaux-háromszög egy állandó szélességű háromszög-szerű görbe, a körön kívüli legegyszerűbb és legismertebb állandó szélességű görbe. Három kör lap metszetéből származtatható, amelyek középpontja a másik kettő határvonalának metszeténél van. A Reuleaux-háromszöget úgy is elképzelhetjük, ahogy az ábra mutatja: egy szabályos háromszög oldalait egy-egy, a szemközti csúcsból rajzolt körívvel helyettesítjük.

Az alakzat Franz Reuleaux-ról, egy 19. századi német mérnökről kapta a nevét, aki úttörő szerepet játszott az egyik mozgástípust a másikba átalakító gépek tanulmányozásában, és aki Reuleaux-háromszögeket használt a terveiben. Ezeket az alakzatokat azonban már korábban is ismerték, például a gótikus templomablakok tervezői, Leonardo da Vinci, aki térképvetülethez használta, és Leonhard Euler, aki az állandó szélességű alakzatokat tanulmányozta.

Az adott szélességű állandó szélességű alakzatok közül a Reuleaux-háromszög rendelkezik a legkisebb területtel és a sarkainál a lehető legélesebb (legkisebb) szöggel (120°).

A Reuleaux-háromszög az első az úgynevezett Reuleaux-sokszögsorozatban, amelynek határai állandó szélességű görbék, és amelyeket páratlan oldalszámú szabályos sokszögekből képezhetünk.

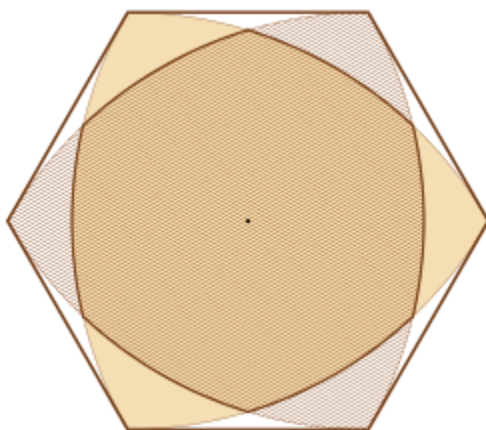
Támaszegyenesen olyan egyenest értünk, mely a konvex tartomány egy vagy több határpontját tartalmazza, de nem tartalmazza egyetlen belső pontját sem. A Reuleaux-háromszög

legalapvetőbb tulajdonsága az állandó szélesség, ami azt jelenti, hogy minden párhuzamos támaszegyenespár (azaz két azonos meredekségű egyenes, amelyek közül mindkettő érinti az alakzatot anélkül, hogy áthaladnának rajta) esetén a két egyenes azonos euklideszi távolságra van egymástól, függetlenül ezeknek az egyeneseknek az irányától. Bármely párhuzamos támaszegyenespárban az egyik egyenes szükségszerűen érinti a háromszöget annak egyik csúcsában. A másik támaszegyenes érintheti a háromszöget a szemközti ív bármely pontján, és távolságuk (a Reuleaux-háromszög szélessége) megegyezik az ív sugarával.

Az első matematikus, aki felfedezte az állandó szélességű görbék létezését, és megfigyelte, hogy a Reuleaux-háromszög állandó szélességű, Leonhard Euler lehetett. Az 1778-ban publikált, *De curvis triangulibus* című cikkében Euler a görbe vonalú háromszögeket vizsgálta, valamint az állandó szélességű görbéket, amelyeket a körhöz hasonló tulajdonságaiknál fogva orbiformoknak nevezett.

A Reuleaux-háromszög szimmetriái

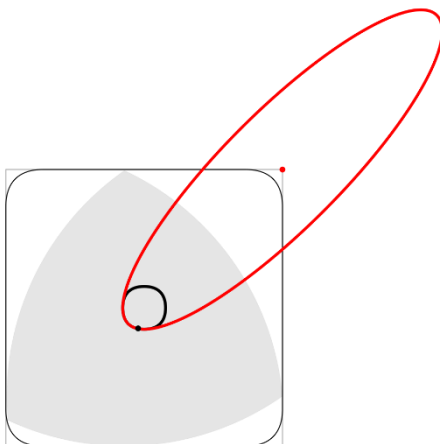
Bár a Reuleaux-háromszög hatszoros diéderszimmetriával rendelkezik, ugyanúgy, mint egy egyenlő oldalú háromszög, nem rendelkezik centrális szimmetriával. A Reuleaux háromszög a „legkevésbé szimmetrikus” állandó szélességű görbe a centrális aszimmetria két különböző mértéke, a Kovner-Besicovitch-mérték (a terület aránya a görbe által bezárt legnagyobb centrálisan szimmetrikus alakzathoz) és az Estermann-mérték (a terület aránya a görbét bezáró legkisebb centrálisan szimmetrikus alakzathoz) szerint. A Reuleaux háromszög esetében a két centrálisan szimmetrikus alakzat, amelyek az aszimmetria mértékét meghatározzák, egyaránt hatszögletű, bár a belsőnek görbe oldalai vannak.



A Reuleaux háromszög átmérői egyenlőtlenebbül osztják fel a területét, mint bármely más állandó szélességű görbe. Vagyis az átmérő két oldalán lévő területek maximális aránya, az aszimmetria egy másik mértéke, nagyobb a Reuleaux háromszög esetében, mint más állandó szélességű görbék esetében.

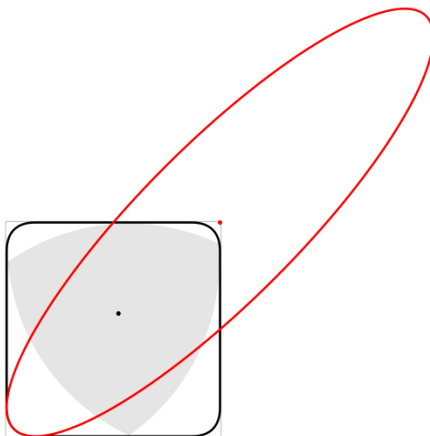
Az állandó szélességű alakzatok egyik lényeges tulajdonsága

Bármely állandó szélességű görbe egy forgó részt, úgynevezett rotort alkothat egy négyzeten belül, egy olyan alakzatot, amely teljes forgást végezhet úgy, hogy a négyzeten belül marad, és mindig érinti a négyzet mind a négy oldalát. Egy adott négyzet alakú keretet tekintve a Reuleaux-háromszög a lehető legkisebb területű rotor. Mivel a Reuleaux-háromszög a korábban bemutatottak miatt nem centrálszimmetrikus, az ilyen alakú rotor tengelye forgás közben nem marad egyetlen pozícióban rögzítve, hanem négy ellipszis darabjai által alkotott görbét követ.



Az ábrán az egyik ilyen ellipszis látható, melynek középpontja a négyzet egyik csúcsába esik, a többi ellipszis középpontjai a négyzet további csúcsaiban helyezkednek el.

120°-os szögei miatt a forgó Reuleaux-háromszög nem érheti el a négyzet csúcsainál lévő szögek közelében lévő egyes pontokat, hanem egy enyhén lekerekített sarkú alakzatot fed le, amelyet szintén ellipszis ívek alkotnak.



Az ábrán az egyik ellipszis látható, amely meghatározza a négyzet csúcsánál a Reuleaux-háromszög által elért alakzat határvonalát, az ellipszis középpontja szintén a négyzet egyik csúcsában van; a többi ellipszis középpontjai az előző esethez hasonlóan a négyzet további csúcsaiban helyezkednek el.

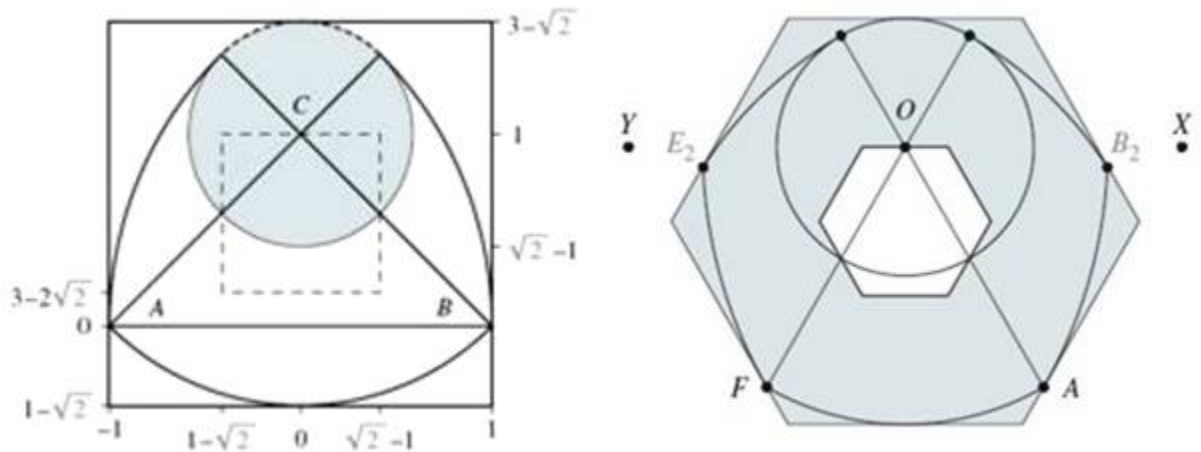
Négyzet alakú furatok készítése

Előfordulhat, hogy kör alakú furatok helyett négyzetes furatokra van szükség, ám ezek előállítása első belegondolásra nem tűnik valami egyszerűnek. Ilyen esetekben a furat legyártásához egy olyan mechanizmusra van szükség, ami valamilyen módon képes a kör alakú mozgást négyzetessé átalakítani. A fentebb említett tulajdonságok miatt a Reuleaux-háromszög alakú szerszám alkalmas lehet erre a feladatra.

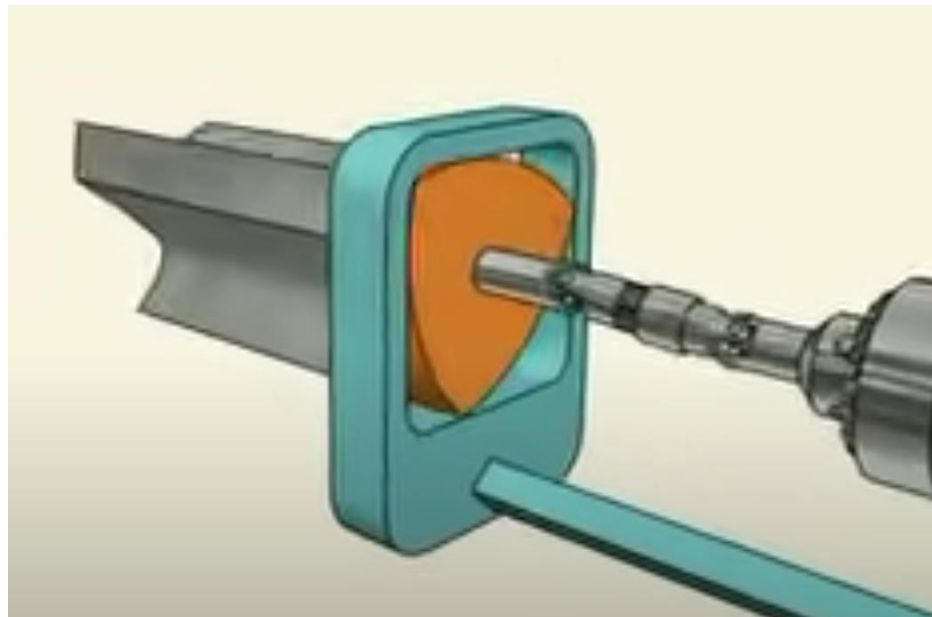
Az első, a Reuleaux-háromszöget felhasználó ilyen szerszám elkészítése James Watts nevéhez fűződik. Az ilyen elven működő fűrök gyártására Watts egy saját céget hozott létre Watts Brothers Tool Works néven, amely mind a mai napig üzemel.

Ez a gyártási eljárás azonban a korábbiakban említettek szerint nem képes tökéletes négyzet alakú furatokat létrehozni. A geometriából adódóan a sarkok minden esetben rendelkeznek valamilyen lekerekítési rádiusszal. Ennek a problémának az orvoslására Barry Cox és Stan Wagon megalkotott egy új geometriai kialakítást, amellyel már tökéletes négyzet alakú furatok készíthetők. Az általuk javasolt geometria a Reuleaux-háromszög egy módosított változata, melyben az egyik csúcsot lekerekítették. Ennek a lekerekítési rádiusznak a középpontjában elhelyezett vágószerszám már képes lehet egy teljesen négyzetes furat

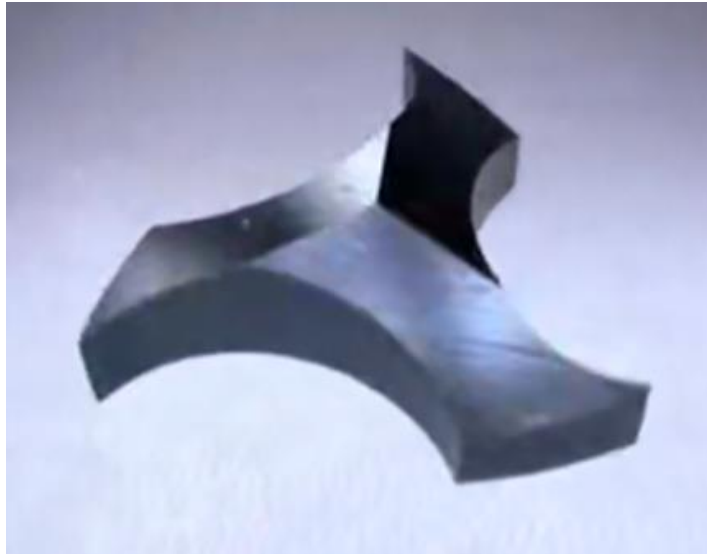
generálására. Számítógépes algebrai eszközöket alkalmazva Cox és Wagon később általánosította ezt a megközelítést és olyan megoldásokat is kidolgoztak, amivel például tökéletes hatszöget és bármilyen más, páros oldalszámú sokszöget is ki lehet alakítani.



A négyzetes lyuk fúrásához elég nehéz volna kézzel vezetett fúrószárral lekövetni a szükséges ellipszisíveket, ezért egyfajta sablont használnak a fúrófejek esetén az ábrának megfelelően:



A szerszám maga egy a Reulaux-háromszög csonkolásával és a rajta szükséges vágófelületek kialakításával kapott alakzat:



A szerszámhoz rögzített sablon mozog a sablonvezető négyzetben, ezzel biztosítva a szerszám középpontjának megfelelő ellipszis-pályán mozgását, és a megfelelő négyzetes furat kialakítását.



További gyakorlati alkalmazások

Az állandó szélesség azt jelenti, hogy minden két párhuzamos támaszvonal távolsága azonos, függetlenül azok irányától. Mivel szélessége állandó, a Reuleaux-háromszög az egyik válasz a következő kérdésre: „A körön kívül milyen alakúra lehet a csatornafedőket készíteni, hogy ne essen le a lyukon keresztül?”

A Reuleaux háromszög további alkalmazásai közé tartozik gitárpengetők, tűzcsap anyák, ceruzák és fűrófejek formázása sarkított négyzet alakú lyukak fúrásához, valamint grafikai tervezésben egyes táblák és vállalati logók formájában. (A ceruzákhoz azért használják, mert az állandó szélesség miatt kényelmes kézbe fogni bármely irányban is áll a ceruza, ugyanakkor az asztalról a súlypontjának a határvonalhoz képest aszimmetrikus elhelyezkedése miatt nehezebben gurul le az asztalról, mint a kör keresztmetszetű párja. Korábban a legurulás megakadályozását hatszög keresztmetszetű ceruzák segítségével oldották meg, de azokat kényelmetlenebb kézbe fogni).

A Reuleaux-sokszögsorozat állandó szélességű görbéket ad meg. Ezen görbék némelyikét érmék alakjaként használják: az alak jellegzetessége miatt könnyen felismerhető, és nem összekeverhető a többi érmével, ugyanakkor az érme alakjának állandó szélessége miatt a pénzbedobós automatákban a használatuk lehetséges, a szélességük meghatározásával a pénzérme értéke beazonosítható.



Felhasznált források:

<https://www.cnc.hu/2012/01/negyzetes-furatok-keszitesi/>

https://www.reddit.com/r/EngineeringPorn/comments/12awm80/how_to_drill_square_hole_squircle/

https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle

<https://hackernoon.com/apples-icons-have-that-shape-for-a-very-good-reason-720d4e7c8a14>

<https://99percentinvisible.org/article/circling-square-designing-squircles-instead-rounded-rectangles/>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Squircle>

https://ibuilders-hu.techinfus.com/sverlo/dlya-kvadratnyh-otverstij/#google_vignette

<https://hu.wikipedia.org/wiki/Reuleaux-soksz%C3%B6g>

https://en.wikipedia.org/wiki/Curve_of_constant_width

<https://demonstrations.wolfram.com/DrillingATriangularHole/>

<http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=195901&shmath=1>