

## Fedőlap

- Dolgozat címe: **Feladatok a Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel környékén**
- A dolgozat *Gyenes Zoltán: A Bolyai-Gerwien-tétel és környéke* című, a Speciális Matematika Szekcióban 2025. július 5. szombaton elhangzott előadásához kapcsolódik.
- A dolgozat szerzője: **Hujter Bálint**
- A dolgozat szerzőjének munkahelye:  
*Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium*
- A dolgozat szerzőjének email címe: *hujterb@gmail.com*

## Feladatok a Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel környékén

Hujter Bálint  
(Gyenes Zoltán előadása alapján)

2025. AUGUSZTUS 4.

### Bevezetés

Gyenes Zoltán kollégám zárónapi speciális matematika tagozat szekciós előadása után azt gondoltam, hogy talán hasznos lenne, ha erről az előadásról készülne valamiféle leirat. Ezért ezt választottam dolgozatom témájául. Az előadáson elhangzott feladatokat Gyenes Zoltán elküldte nekem, én ezt egészítettem ki néhány megoldással, ábrákkal, összefűző gondolatokkal, egy-két újabb kapcsolódó feladattal. A feladatokat és megoldásokat egy saját (az előadottaktól kicsit különböző) sorrendben és felépítésben tárgyalom.

### Három fontos feladat és egy tétel

Az előadás ívét az alábbi három feladat és a címadó tétel határozta meg.

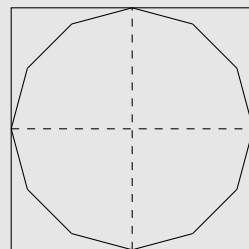
**1. feladat (1 négyzetből 3 ugyanakkora négyzetet).** Daraboljunk fel egy négyzetet legfeljebb 10 darabra úgy, hogy a darabokból három egybevágó négyzetet lehessen összerakni.

**2. feladat (A torta).** Egy matekot kedvelő kisgyerek születésnapjára egy nem egyenlő szárú háromszög alakú tortát kért, mely alul piskótarétegből, felül citromkrémből áll. A kapott torta nem tetszett neki, mert ő pont a tükörképére vágyott. Segítsünk neki átdarabolni a tortát a kívánt alakúra anélkül, hogy a darabokat fejjel lefelé fordítanánk.

**3. feladat (A szabályos 12-szög).**

Az ábrán egy négyzetbe írt szabályos 12-szöget látunk.

Bizonyítsuk be – lehetőleg átdarabolással –, hogy a 12-szög területe  $3/4$  része a négyzetnek.



A 1. feladat az Arany Dániel Matematikaversenyen a 2009/2010 tanévben a Kezdők III. kategóriájának döntőjének 3. feladata volt. Meglehetősen nehéz feladat ebben a formában, de alább majd teszünk javaslatot kapcsolódó könnyebb feladatokra, ezeket akár rögtön a kitűzéskor el lehet mondani. A 2. feladat lényegében a Skljarszkij–Csencov–Jaglom feladatgyűjtemény<sup>1</sup> egy feladata, egy Gyenes Zoltán által kitalált szellemes mesével. A 3. egy klasszikus feladat (a szabályos 12-szög területének meghatározása) kevésbé szokásos megkérdez

## A Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel

A három feladat mindegyike kapcsolódik az alábbi tételhez.

**4. tétel** (Wallace–Bolyai–Gerwien). *Egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba.*

A tétel korábban Bolyai–Gerwien-tétel néven volt ismert (Bolyai Farkas 1833-ban, tőle függetlenül Paul Gerwien 1835-ben adott bizonyítást), de később kiderült, hogy William Wallace már 1807-ben leírta.

Pontosan mit értünk az átdarabolhatóság alatt? Az egyik sokszöget felbontjuk véges sok sokszögre, amelyeket egybevágósági transzformációkkal átrendezünk úgy, hogy a másik sokszöget alkossák.

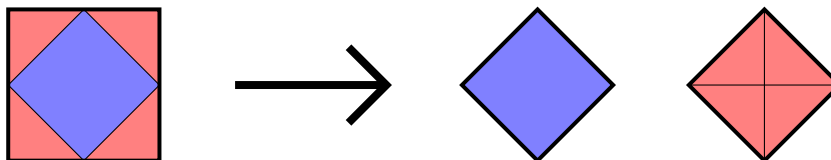
## 1. Átdarabolás négyzetek közt

Az 1. feladat önmagában meglehetősen nehéz, érdekes előbb azon gondolkodni, hogy 3 helyett milyen  $n$ -ek esetén tudunk  $n$  db ugyanakkor négyzetre átdarabolni?

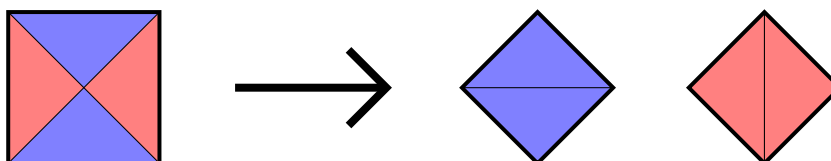
**1.1. feladat** (1 négyzetből  $n$  ugyanakkora négyzetet). Milyen  $n$  pozitív egészre tudsz egy négyzetet  $n$  darab ugyanakkora négyzetre átdarabolni? Nem kell megtalálni az összes lehetőséget, azokra az esetekre koncentrálj, amelyeket meg tudsz csinálni.

- Ha  $n$  négyzetszám, akkor könnyű dolgunk van.
- Az  $n = 2$  esetre is található könnyen megoldás, például 5 darabra vágva:

<sup>1</sup>A feladatgyűjtemény 24. feladata így szól: *Adott az ABC háromszögtartomány. A síkból kiemelve fordítsuk meg, majd egyenes vonalakkal vágjuk fel részekre, hogy le tudjuk fedni vele az eredeti ABC háromszöget. Legalább hány vágásra van szükségünk?* Forrás: D. O. Skljarszkij–N. N. Csencov–I. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Geometria I. (Planimetria), Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.



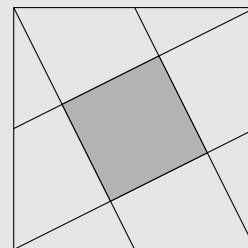
vagy még egy kicsit ügyesebben elég 4 darabra vágni:



- $n = 5$ -re található olyan megoldás, amelyre az alábbi feladat nyújt segítséget.

## 1.2. feladat (Ferde négyzetek).

- a) Az ábrát úgy kaptuk, hogy összekötöttük egy egység-négyzet csúcsait és oldalfelező pontjait. Mekkora a sötétebb rész területe?
- b) Hogyan módosul a válasz, ha felezőpont helyett más osztópontokat használunk?



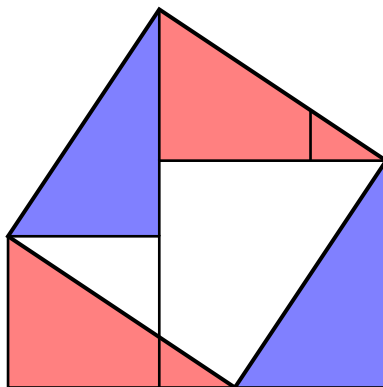
A b) rész alapján a módszer általánosítható minden olyan  $n$  számra, amely előáll két négyzetszám összegeként.

## 1.1. Különböző méretű négyzetek

Természetes kapcsolódó kérdés az is, hogy mikor lehet átdarabolni egy nagyobb négyzetet két kisebb, különböző területű négyzetre? Elégséges-e az a nyilvánvalóan szükséges feltétel, hogy a két kisebb négyzet területének összege meg kell egyezzen a nagy négyzet területével? Ekkor eszünkbe juthat a Pitagorasz-tétel, hiszen az is éppen arról szól, hogy két két kisebb négyzet területének összege megegyezik egy nagyobb négyzet területével.

**1.3. feladat.** A Pitagorasz-tétel bizonyításai között keress olyat, melynek segítségével be tudod bizonyítani, hogy két tetszőleges négyzetet át tudsz darabolni egyetlen négyzetté.

Az alábbi ábra egy ilyen lehetőséget mutat be:

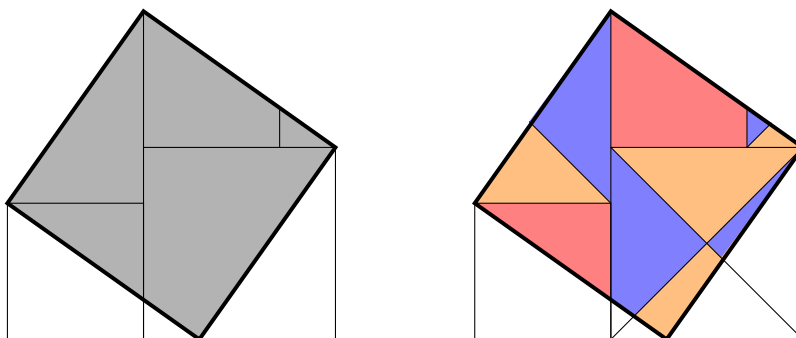


Az ábra azt mutatja, hogy egy nagyobb négyzet mindig átdarabolható két kisebb négyzetbe, ha azok területének összege megegyezik a nagyobb négyzetével. Ehhez ráadásul elegendő 5 részre vágnunk a nagyobb négyzetet.

## 1.2. Megoldás az 1. feladatra

Ezzel persze megoldást kaptunk az 1.1. feladatra, hiszen egy  $n$  területű egymás után leválaszthatunk 1 területű négyzeteket (a  $k$ -adik lépésben egy  $n - k + 1$  területű négyzetet egy  $n - k$  területű és egy 1 területű négyzetre darabolunk át).

Hogy a 1. feladatot is megoldottuk-e, az attól függ, hogy hány darabra esik szét a nagy négyzet az eljárás két lépése során. Az alábbi ábrák mutatják, hogy ez megoldható 10 darabra vágással.



Ez a megoldás különbözik az Arany Dániel Verseny bizottsága által összegyűjtött [megoldásoktól](#).

## 1.3. Kapcsolódó feladat

Egy az 1. feladatnál sokkal könnyebb, de mégis tanulságos rokon kérdés a következő:

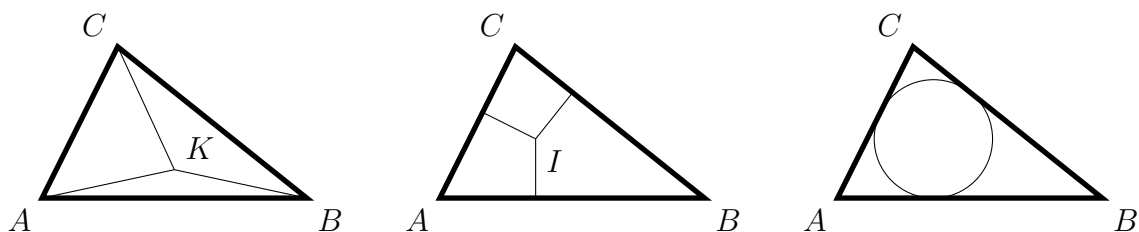
**1.4. feladat.** Daraboljunk át egy szabályos háromszöget három egyforma méretű szabályos háromszögge.

## 2. A tortás feladatról

A tortás feladat azért is kapcsolódik a Wallace–Bolyai–Gerwien-tételhez, mert az következik belőle, hogy az átrendezésnél elegendő körüljárástató egybevágósági transzformációkat használnunk.

Nilvánvalóan elégséges a feladat megoldásához, ha szimmetrikus részekre (pl. egyenlőszárú háromszögekre) vágjuk szét a tortát.

Három egyenlőszárú háromszögre tudunk vágni a körülírt kör középpontjából ( $K$ ) a csúcsokhoz húzott vonalaknak vagy a beírt kör középpontjából ( $I$ ) az oldalakra állított merőlegesek segítségével (tompaszögű háromszög esetén csak az utóbbi működik):



A harmadik ábra egy különösen szellemes (igaz, 4 darabos) szétvágást mutat: ha a beírt kör lapja az egyik darab, a csúcsoknál egy-egy a szögfelezőre szimmetrikus rész marad.

### 2.1. Kapcsolódó kérdések

Természetesen vetődik fel az is, hogy milyen háromszögeket lehet mindössze két darabra felvágva átdarabolni a tükörképükre.

**2.1. feladat. a)** Milyen háromszögeket tudsz felvágni két egyenlő szárú háromszögge?

**b)** Van-e olyan háromszög, amelyet két különböző módon is szét lehet vágni két egyenlőszárú háromszögge?

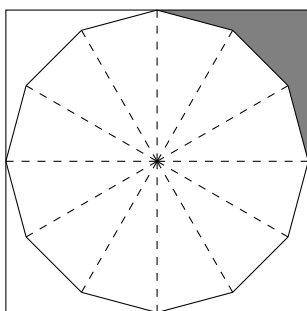
Az **a)** kérdést alaposan körbjárja a Sklarszkij–Csencov–Jaglom-féle példatár. A **b)** kérdést Balogh Richárd 7.c osztályos tanuló, Gyenes Zoltánnal közös fazekasos tanítványunk tette fel egy matekórán.

A következő feladat a terület-átdarabolásokhoz már kevésbé kapcsolódik (cserébe más fontos és érdekes témákhoz jó bevezetést nyújt).

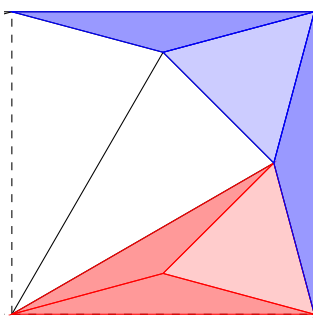
**2.2. feladat.** Osszunk fel négy egyenlőszárú háromszögre egy **a)** szabályos ötszöget **b)** négyzetet **c)** szabályos háromszöget úgy, hogy a keletkezett darabok közt semely kettő ne legyen egybevágó.

### 3. A szabályos 12-szögről

A 3. feladat megoldásának vázlata. A szabályos 12-szöget szétvághatjuk 12 db egybevágó „pizzaszeletre”.



Elengendő bizonyítanunk, hogy az ábrán szürkével színezett rész (amely a négyzet egy csúcsánál kimarad a 12-szögből) éppen akkora területű, mint egy pizzaszelet. Ezt átdarabolással mutatjuk meg:



A sötétebb kék háromszögeket a sötétebb piros háromszögek, a világosabb kék háromszöget a világosabb háromszög helyére tehetjük át.

De miért lesznek egybevágók az átmozgatott háromszögek? Ennek kulcsa annak belátása, hogy a világosabb háromszögek szabályosak (a sötétebbek pedig egyenlő szárúak,  $150^\circ$ -os szöszöggel). Ennek bizonyítását az Olvasóra bízunk.



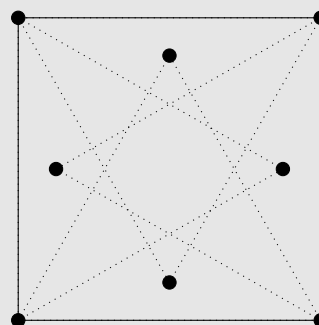
### 3.1. Kapcsolódó feladatok

**3.1. feladat** (Négyzet és szabályos háromszögek).

a) Az ábrán látható 8 pontot úgy kaptuk, hogy egy négyzetbe négy darab szabályos háromszöget rajzoltunk.

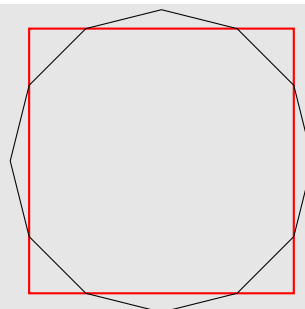
Hányféle módon lehet hármat kiválasztani közülük úgy, hogy azok egyenlő szárú háromszöget alkossanak?

b) El lehet-e helyezni máshogy 8 pontot úgy, hogy ennél is többféle egyenlő szárú háromszöget alkossanak?



**3.2. feladat.**

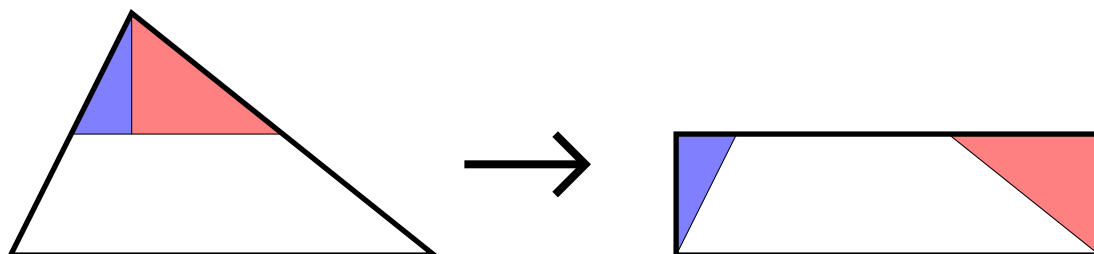
Bizonyítsd be, hogy az ábrán látható négyzet és szabályos 12-szög egyforma területű.



## 4. A Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel bizonyítása

A Wallace–Bolyai–Gerwien tételt például a következő módon láthatjuk be úgy, részben a korábban meg gondoltak segítségével.

1. A sokszögeket feldaraboljuk háromszögekre. (Ez konkáv esetben is könnyű, hiszen nem csak átlókat használhatunk.)
2. A háromszögek könnyen átdarabolhatók téglalapokká, pl. egy alkalmasan választott középvonal és magasságvonal segítségével:

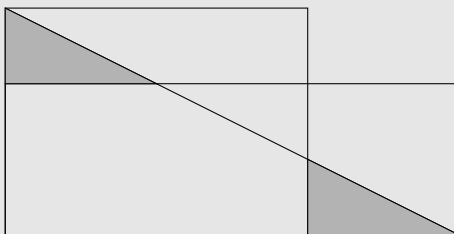


(Arra figyeljünk, hogy ha tompaszögű, akkor a leghosszabb oldallal párhuzamos középvonalat húzzuk be.)

3. Ha be tudnánk látni, hogy bármely két azonos területű téglalap átdarabolható egymásba, akkor készen is lennénk. Hiszen: minden téglalapot egy-egy négyzetté alakítanánk, s ezután ...
4. ... mint az első fejezetben már meggondoltuk, két (vagy több) négyzetet át tudunk darabolni egyetlen négyzetté.
5. Ezzel készen is vagyunk a bizonyítással, hiszen az átdarabolás egy megfordítható folyamat (így ha két sokszöget át tudunk darabolni ugyanabba a négyzetbe, akkor egymásba is átdarabolhatók).

Tehát már csak azt kell tisztáznunk, hogy két azonos területű téglalap miért darabolható át mindig egymásba.

**4.1. feladat.** Bizonyítsd be az ábra segítségével, hogy két egyenlő területű téglalapot mindig át lehet darabolni egymásba.



Gyenes Zoltán két hasznos megjegyzése a feladathoz:

- *A két szürke háromszög egybevágóságát bizonyítani kell. Lehet számolással, de van közvetlen geometriai megfontolás is.*
- *Vigyázzunk! Ez az átdarabolás nem minden oldalarány esetén működik!*

#### 4.1. 3-dimenziós kitekintés

Hilbert híres problémái közül a 3. éppen a Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel 3-dimenziós változata volt.

**4.2. feladat** (Hilbert 3. problémája, 1900). Igaz-e, hogy ha két 3-dimenziós poliéder térfogata megegyezik, akkor átdarabolhatók egymásba.

Hilbert problémái közül ez került legelőször megválaszolásra, Max Dehn még ugyanabban az évben adott egy ellenpéldát. Ennek ismertetése meghaladja eme dolgozat (és a középiskolás matematika) kereteit, de az alábbi feladat jól megfog egy fontos gondolatot a Dehn-féle eredményből.

**4.3. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy semmilyen téglalapot nem lehet átdarabolni háromszöggé, ha a darabokat csak eltolni szabad.

Nem nehéz, de érdemes meggondolni azt is, hogy mi a helyzet a tortás feladattal 3 dimenzióban.

## Lezárás

Gyenes Zoltán előadása alapján bemutattam a Wallace–Bolyai–Gerwien-tételt (egy bizonyítás-vázlattal együtt) és azt a jópár érdekes feladatot, amelyek társaságában jól tanítható ez a téma a speciális matematika tagozatos matekórákon vagy szakkörökön. A téma nagy előnye, hogy a feladatok zöme nem igényel komolyabb matematikai előképzettséget, akár már 7-8. osztályosokkal is tárgyalhatók. A feladatok lazább kapcsolódódása miatt a téma tanítása nem csak egy blokkban, hanem hosszabb időre szét húzva (pl. a feladatokat egymás utáni heti/havi feladatsorokon kitűzve) is jól megvalósítható.