

Órák a könyvből projekt: Naptárak óraterv

Szekciófüggetlen előadás

Órák a könyvből – rendhagyó témájú matematikaórák

Babus Réka, Juhász Péter

Babus Réka

Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium

babus.reka@e5vos.hu

Bevezetés

A vándorgyűlésen Juhász Péterrel közösen bemutattuk az *Órák a könyvből* projektünket. Ennek keretében a résztvevő diákok havonta egyszer olyan tanórán vesznek részt, amely független a kötelező tananyagtól, és a matematika egy-egy alkalmazására fókuszál. A vándorgyűlésen tartottunk egy mintaórát a gerrymanderingről (választókerület manipulációjáról) és invitáltuk a kollégákat, hogy vegyenek részt a kezdeményezésünkben. Örömünkre több mint negyvenen jelezték, hogy szeretnék kipróbálni a készülő anyagainkat, és szívesen együttműködnének velünk. A jelentkező kollégákkal háromhavonta három kidolgozott óratervet osztunk meg, melyekről közösen is beszélünk, és amiket a visszajelzések alapján szükség esetén módosítunk. Jelen dolgozatban szeretném részletesen bemutatni az egyik olyan tananyagot, amelyet a nyár folyamán készítettem el, és hamarosan megosztunk a kollégákkal. A tanóra a naptárak témakörét járja körbe. Elsősorban 9-10. osztályos tanulóknak készült, de nem igényel mélyebb matematikai előismereteket, így alacsonyabb évfolyamokon is alkalmazhatónak tartom.

Naptárak – óraterv

Az óra során szeretnék rávilágítani arra, hogy mennyire összetett feladat egy olyan pontos és megbízható naptár létrehozása, amely hűen tükrözi a Nap és a Föld egymáshoz viszonyított mozgását. Bemutatom, hogyan jutottunk el a ma is használatos Gergely-naptárhoz, miközben a diákok különféle rövid feladatokon keresztül vizsgálják meg, hogy egyes naptár konstrukciók hosszabb távon hány nap eltolódást eredményeznek. Az óra második felében a tanulók megismerkednek egy olyan algoritmussal, amellyel gyorsan és hatékonyan meghatározható, hogy egy adott dátum a hét melyik napjára esik. Ez a módszer szorosan kapcsolódik a maradékos osztás témaköréhez.

A tanóra egyes elemeinek időbeli becslése:

Az óra elemei	Rövid leírás	Módszer	Várható időtartam
1.	1 év: fogalom és időtartam	kérdezve kifejtés, önálló munka	5 perc
2.	A naptárak története	kérdezve kifejtés, tanári előadás	3 perc
3.	Gergely naptár és szökőévek	kérdezve kifejtés, önálló munka	16 perc
4.	A Doomsday algoritmus	kérdezve kifejtés, önálló munka	20 perc
5.	Lezárás	tanári előadás	1 perc

1. 1 év: fogalom és időtartam

A témakör bevezetéseként javaslok megkérdezni a tanulókat arról, hogy mit értünk 1 év alatt és megtippeltetni velük, hogy ez pontosan hány napot, órát, percet, másodpercet ölel fel. Miután megosztották ötleteiket, adjuk meg a pontos meghatározást: *1 év az az időtartam, ami után a Nap egy adott földrajzi helyen ismét az égbolt azonos pontján tűnik fel. Ez 365 nap, 5 óra, 48 perc, 46 másodpercet jelent.*

Ezen a ponton villámkérdésként feltehetjük: „*Hány naptól áll 1 év, ha négy tizedesjegyre kerekítjük?*” – ez a számítás későbbi feladatoknál hasznos támpontot fog adni a tanulónak.

2. A naptárak története

Az óra a naptárak kialakulásával folytatódik. Jó átvezető kérdés lehet, hogy a ma használt hónapneveinkben milyen római számokat fedezhetünk fel. Hamar észrevehető, hogy a sept = 7, okt = 8, nov = 9, dec = 10 jelentésű, ám ezek mind két hónappal el vannak csúsztatva. (Például a szeptember nem 7., hanem a 9. hónap) Előfordulhat, hogy van olyan diák, aki tudja, hogy ennek milyen történeti okai vannak. Ha van ilyen, jó ha ő mondja el; ha nincs, akkor érdemes nekünk röviden összefoglalni az alábbiakat:

A ma használatos naptárak kialakulásában nagy szerepe volt az ókori rómaiaknak. Ők kezdetben tíz 30-31 napból álló hónapot határoztak meg: Martius, Aprilis, Maius, Junius, Quintilis, Sextilis, September, October, November, December. Ezek a hónapok a földművelésre és a hadviselésre alkalmas időszakokat jelölték, míg a kimaradó, közel 60 nap a téli holt szezont foglalta magába. Később bevezették a 12 hónapos évet, amelyet Januarius és Februarius egészített ki. Januarius az év első hónapja lett, ez magyarázza a sorszámok eltolódását.

i.e. 46-ban Julius Caesar uralkodása alatt jött létre a Julianus-naptár. Ebben a hónapok 30 vagy 31 naposak voltak, kivéve a 29 napos Februariust, amely minden negyedik évben 30 napos lett. A Quintilist Caesar tiszteletére átnevezték Juliusnak.

Augustus császár idején a Sextilist Augustusnak nevezték el. Augustus azonban nem szerette volna, hogy az ő hónapja csak 30 napos legyen, míg Caesaré 31, ezért elrendelte, hogy február végéről vegyenek el egy napot, és azt tegyék augusztushoz. Így alakult ki, hogy február 28 napos (szökőévben 29), míg július és augusztus egyaránt 31 naposak.

3. Gergely naptár és szökőévek

A Julianus-naptár már nagyon hasonlít a ma is használt naptárhoz, így meglepő lehet, hogy napjainkban mégsem pont ezt alkalmazzuk. Az alábbi feladat arra mutat rá, hogy hosszú távon milyen probléma adódott a Julián-naptárral.

A Julianus naptár négy évente iktat be szökőévet, vagyis az év hosszát 365,25 napnak tekinti. A valóságban azonban egy év ennél rövidebb: 365 nap 5 óra 48 perc 46 másodperc. Néhány

év alatt ez nem jelent problémát, de az 1600-as évekre már gondot jelentett. Nagyjából hány nappal tolódott el eddigre a naptár?

Megoldás: A bevezető feladatban már kiszámoltuk, hogy a 365 nap 5 óra 48 perc 46 másodperc körülbelül 365,2422 napnak felel meg. Az eltérés így évente kb. 0,0078 nap. Ez 1600 év alatt körülbelül 12,5 napot jelent.

Az 1600-as évekre a 12,5 napnyi eltolódás már elég jelentős volt ahhoz, hogy bizonyos helyzetekben (pl. földművelésben) problémát okozzon. Ez vezetett az 1582-es naptárreformhoz: XIII. Gergely pápa úgy rendelkezett, hogy 1582. október 4., csütörtököt után közvetlenül 1582. október 15. következzen. Így eltűntek a Caesar óta felhalmozott felesleges napok.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért csak 10 nap maradt ki, mikor az imént számoltuk ki, hogy 12,5 nappal tolódott el Caesar óta a naptár. Érdekes előbb a diákokat megkérdezni, mielőtt megadjuk a választ. A magyarázat vallási okokra vezethető vissza: a húsvét időpontját a katolikus egyházban a tavaszi napéjegyenlőséget követő holdtölte utáni első vasárnapra határozták meg. A niceai zsinaton (325-ben) rögzítették a napéjegyenlőség dátumát, amely akkor **március 22-re** esett. Gergely pápa ezt, vagyis a 325-ös állapotot akarta visszaállítani.

Ha Gergely pápa csupán csak eltörölte volna a felhalmozódott napokat, akkor bő ezer év múlva ismét hasonló probléma alakult volna ki. Ezért a szökőévek rendszerét is módosította: 4 évente van szökőév, de a 100-zal osztható évszámok esetében nincsen, a 400-zal osztható évszámok esetében pedig ismét van. Ehhez kapcsolódik a következő feladat:

A reformot nem szerették volna ezer évente végrehajtani, így Gergely pápa módosította a szökőévek rendszerét: 4 évente van szökőév, de a 100-zal osztható évszámok esetében nincsen, a 400-zal osztható évszámok esetében pedig ismét van. Ez hány év alatt okoz 1 nap eltolódást?

Megoldás: $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} \approx 365,2425$. Korábban már kiszámoltuk, hogy 1 év 365,2422 napot jelent. Az eltérés így évente már csak 0,003 nap, ami nagyjából 3333,3 évente okoz 1 nap eltolódást.

Érdekes lehet megmutatni egy másik lehetséges rendszert a szökőévek kezelésére, ami szorosan épít a Julianus-naptárra. Hamar kiszámolható, hogy a Julianus-naptár körülbelül

128,026 évente okoz 1 nap eltolódást. A naptárat tehát lehetne úgy is javítani, hogy 128 évente ne legyen szökőév. Villámkérdésnek feltehetjük: *ez pontosan hány napos évet jelentene?*

Kapcsolódó feladatnak érdekes lehet azt is megvizsgálni, hogyan lehet eldönteni egy sokjegyű számról, hogy osztható-e 128-cal. Ez hozzásegítheti a tanulókat, hogy az ismert oszthatósági szabályokat jobban megértsék.

4. A Doomsday algoritmus

Ezt követően a naptárak témakörnek egy másik területével foglalkoznánk. Gyakran felmerül a kérdés, hogy egy adott dátum a hét melyik napjára esik. Ilyenkor legtöbbször a telefon naptárához nyúlunk, hogy megnézzük. Hasznos tudás és jó agytorna azonban, ha ezt naptár nélkül is meg tudjuk állapítani. Erre mutatok be egy elterjedt módszert: a Doomsday-algoritmust.

Ez az algoritmus olyan eljárást kínál, amelynek segítségével viszonylag gyorsan és kevés számolással meg tudjuk határozni, hogy egy adott dátum a hét melyik napjára esik. Múltbeli és jövőbeni dátumokra egyaránt alkalmazható. Az algoritmust John Horton Conway, brit matematikus dolgozta ki, aki Charles Lutwidge korábbi módszerét fejlesztette tovább. Conway tökélyre fejlesztette az algoritmus gyors alkalmazását. Az a történet járja, hogy számítógépén a belépéskor 10 dátumról kellett gyorsan megválaszolnia, hogy a hét melyik napjára esnek. A legjobb ideje állítólag 15 másodperc volt, ami azt jelenti, hogy átlagosan mindössze 1,5 másodpercet vett igénybe dátumonként.

Az algoritmus azon alapul, hogy minden évben lesznek olyan dátumok, amik ugyanarra a napra fognak esni, mint február utolsó napja. Ezek a február utolsó napjától 7-tel osztható távolságra lévő dátumok lesznek. Ilyenek például a március 7, március 14, március 21 stb. Február utolsó napját és azokat a napokat, amik vele egy napra esnek, Conway Doomsday-nak nevezi, a továbbiakban én is így hivatkozok rájuk.

Az algoritmus lényege, hogy minden hónapban elég egy Doomsday dátumot megjegyeznünk. Ehhez viszonyítva már könnyen kiszámíthatjuk a keresett dátumokat. A Doomsday-dátumok kiválasztására többféle lehetőség is van, de Conway a könnyű megjegyezhetőség érdekében az alábbiakat javasolta:

- Páros hónapoknál: 04.04, 06.06, 08.08, 10.10, 12.12

- Páratlanra: Az “I work 9 to 5 at the 7-Eleven” mondat alapján:
05.09, 09.05, 07.11, 11.07
- Március: Pi nap - 03.14
- Január: nem szökőévben 3., egyébként 4.-e

További könnyítést jelent, ha a hét napjait számokkal helyettesítjük, hiszen így egyszerűbben tudunk műveleteket végezni. A hét napjait feleltessük meg a 7-es maradékoknak: Legyen a vasárnap a 0, a hétfő az 1, a kedd a 2, a szerda a 3, a csütörtök a 4, a péntek az 5, a szombat a 6.

Ezek áttekintése után már ki is próbálhatjuk az algoritmust három 2025-ös dátumon, tudva, hogy ebben az évben a Doomsday péntekre esik. Az alábbi 3 dátum praktikus választás, mert mindegyik kiszámítása egy kicsit más eljárást igényel.

- 2025. december 12
- 2025. április 28
- 2025. október 1.

Megoldások:

December 12 egy Doomsday, így ez hamar megválaszolható, hogy szintén egy pénteki nap lesz.

Áprilisban 4.-e egy Doomsday. Ehhez még 24 napot kell hozzáadnunk, hogy április 28-at kapjunk. 4.-e péntek (5-ös szám), így $5 + 24 = 29$ aminek a 7-es maradéka 1, tehát hétfő lesz április 28.-a

Októberben 10.-e a Doomsday. Ebből 9 napot kell kivonni, hogy október 1-et kapjunk. Tehát $5 - 9 = -4$, ami a 3-as maradéknak, tehát a szerdának felel meg.

Az előző feladatban kihasználtuk, hogy ismertük a 2025-ös év Doomsday-át. Érdekes itt felvetni, hogy ha megtanuljuk minden egyes év Doomsday-át, akkor tudjuk máskor is alkalmazni az algoritmust. Reméljük, hogy a tanulók ezzel nem elégszenek meg és a „provokációra” felvetik, hogy ennél talán van ügyesebb módszer.

Észrevehető, hogy a Gergely naptár reformja után 400 évenként ismétlődik a naptár ciklus, így nem kellene végtelen sok Doomsday-t megjegyezni, 400 évnyi adat is elegendő lenne. Remélem, hogy a tanulók ezzel még nem elégszenek meg.

Érdeemes megvizsgálni, hogy évente hány nappal tolódik el a Doomsday: Látható, hogy mivel a 365 7-tel osztva 1 maradékot ad, a 366 pedig 2-t, így nem szökőévben 1 nappal, szökőévben pedig 2 nappal tolódik el a Doomsday. Ennek segítségével az elkövetkezendő vagy előző néhány év Doomsday-át is meghatározhatjuk.

Ezen a ponton érdemes egy általános, praktikus módszert megemlíteni: A kiinduló dátum Doomsday-ához hozzáadunk annyit, ahány év eltelt és még annyit, ahány ebből szökőév volt.

A számolás megkönnyítését segíti, ha néhány Doomsday-t megjegyzünk és a keresett dátumhoz legközelebb esővel számolunk. Ha megjegyezzük a századfordulók Doomsday-eit akkor elég csupán 4 napot megjegyeznünk és a Doomsday-ek kiszámításakor nem kell túl nagy számokkal számolnunk.

A századfordulók Doomsday-ei:

- 1700: Vasárnap
- 1800: Péntek
- 1900: Szerda
- 2000: Kedd

Villámkérdésnek jó lehet, ha a tanulók meghatározzák 1-2 tetszőleges év Doomsday-át, hogy lássuk, tényleg megértették-e a módszert.

Végül adjunk nekik tetszőleges dátumokat és kérjük a tanulókat, hogy minél gyorsabban határozzák meg, hogy milyen napra esnek az adott dátumok. Versenyt is rendezhetünk belőle.

Talán még érdekesebb a feladat, ha híres történelmi dátumokat adunk meg. Én az alábbi dátumokat választottam:

- 1848. március 15.
- 1456 július 22 (Nándorfehérvári diadal)
- 1996. november 4 (születésnapom)

Megoldások:

1848. március 15: SZERDA

1800-ban a Doomsday péntek, ami az 5-ös számnak felel meg. Ehhez adunk még $48+484=48+12=60$ -at. A 65 7-es maradéka 2, így az 1848-as év Doomsday-e kedd. A Pi-nap, március 14-e szintén kedd, tehát március 15 szerda lesz.

1996. november 4: HÉTFŐ

Talán gyorsabb, ha a 2000-ből haladunk visszafelé. 2000-ben a Doomsday kedd, ami a 2-es számnak felel meg. Ebből kivonunk $4+1=5$ -öt, ami -3-at eredményez. Ez megfelel a 4-es maradéknak, ami csütörtöki napot jelent. Tudjuk továbbá, hogy a november 7 is csütörtökre esik, november 4 így hétfő lesz.

Ha az 1900-as év Doomsday-ét vesszük alapul, ami szerda: A szerda a 3-as számnak felel meg, ehhez adunk még $96+964=120$ -at. $120+3=123$, aminek a 7-es maradéka 4, ami csütörtöki napot jelent. Tudjuk továbbá, hogy a november 7 is csütörtökre esik, november 4 így hétfő lesz.

1456 július 22: CSÜTÖRTÖK

1400-ban a Doomsday ugyanaz mint 1800-ban, így ez péntek, ami az 5-ös számnak felel meg. Ehhez adunk még $56+564=56+14=70$ -et. Így 75-öt kapunk, melynek 7-es maradéka 5. Így az 1456-os év Doomsday-e péntek. Tudjuk tehát, hogy július 11-e is péntek lesz. Ehhez még 11-et kell hozzáadni, hogy július 22-re érjünk. $11+5=18$, aminek a 7-es maradéka 4. Tehát ez egy csütörtöki nap lesz.

5. Lezárás

Az óra végén érdemes pár mondatban összefoglalni a látottakat: nem egyszerű feladat olyan naptárt alkotni, amely pontosan leköveti a Nap, a Hold és a Föld egymáshoz való viszonyát. Érdekes volt végig követni, hogyan jutottunk el a ma használatos Gergely-naptárig. Remélem, hogy a Doomsday-algoritmus használatát a tanulók nemcsak érdekességként, hanem praktikus tudásként is hasznosítani tudják majd a mindennapjaikban.

Záró gondolatok

A tanórának egy korábbi verzióját már kipróbáltam a vándorgyűlés után egy nyári táborban, és ennek tapasztalatai alapján több helyen is módosítottam. A fent leírt óratervet fogjuk majd megosztani a projektre jelentkezett tanárokkal. Bízunk benne, hogy örömeiket lelik majd az óra megtartásában, és a diákok is érdekesnek találják a látottakat.

Nagyon örülök neki, hogy a vándorgyűlésen lehetőségünk volt előadni és ezzel olyan lelkes, lelkiismeretes kollégákat sikerült elérnünk, akikkel nem biztos, hogy egyébként kapcsolatba kerültünk volna. Köszönjük szépen ezúton is a szervezést!