

BOLYAI JÁNOS KÉZIRATBAN HÁTRAHAGYOTT MATEMATIKAI MUNKÁIRÓL

WESZELY TIBOR

Bő és szakszerű méltatások hangzottak el eddig a világ matematika irodalmának egyik legcsodásabb gyöngyszeméről, az *Appendix*ről. Ez Bolyai János fő műve, s egyben az egyedüli is, mely élete folyamán nyomtatásban megjelent. De a Bolyai által feltárt új matematikai eredmények messzemenően túllépik azt a keretet, melyet az *Appendix* paragrafusai megjelölnek. Az igen mostoha közlési lehetőség — beleértve ide Bolyai szűkös anyagi körülményeit is —, valamint környezetének közönye bénította őt meg abban, hogy a többi eredeti tudományos gondolatait és megsejtéseit nyilvánosságra hozza. Gondoljunk csak arra, hogy hány matematikát is felölelő tudományos folyóirat volt annak idején Erdélyben és Magyarországon, s milyenek voltak a könyvkiadási lehetőségek. Megragadva a számára talán egyetlen alkalmat, melyet apja kínált fel neki, hogy éppen a megjelenés előtt álló nagy műve, a *Tentamen I.* kötetének függelékeként publikálja a parallelákra vonatkozó eredményeit, az a 29 oldal is Jánosnak több mint 100 Rh. forintjába került, mely pénz abban az időben egy szerényebb jövedelmű ember számára igen komoly összegnek számított. És gondoljunk az *Appendix*, majd néhány évvel később a *Responsio* alaptalan és igazságtalan elbírálásaira, melyek munkakedvét és kutatói pályáját majdnem kettétörték. A matematika iránti szenvedélye ezután érezhetően elfojtódik, és az ezt követő tíz évben alig foglalkozik e tudományággal. De ez a nyugtalan lélek nem tudja megállni, hogy a benne feszülő gondolatokat valakivel is ne közölje. Miután sivár környezetében még apjában sem talál egy igazi megértő partnerre, egyedüli hű meghallgatójához, a papírlapokhoz menekül. Amikor csak egészsége megengedi, napestig görnyed kézíratai felett, róva a gondolatait megörökítő betűket. A hányatott élet és a költözködések általi viszontagságok ellenére is több ezer oldalnyi kézirati anyag maradt az utókorra, melyek jó része matematikai tartalmú. Kéziratban maradt értékes kis pályázati műve a *Responsio*, valamint gondos és rendszeres megszerkesztés után ítélve közlésre szánt utolsó, s egyben befejezetlen munkája is, a *Raumlehre*. Tehát nyilvánvaló, hogy egy igen hiányos és torz képet alkotunk Bolyai matematikai munkásságáról, ha azt túlnyomóan csak az *Appendix* alapján ítéljük meg.

A papírlapokra néha futó gondolatait jegyezte fel, máskor pedig pillanatnyi rendszerességgel fejtette ki számításait és mondanivalóját. Egy idő után többször megtörténik, hogy újból visszatér már korábbi gondolataihoz, mint például: a tetraéder hiperbolikus térbeli köbtartalmára vonatkozó számításai vagy az *S* rendszer ellentmondástalanságának problémája, mely kérdés egész életén át foglalkoztatta. Kilátástalan közlési lehetőségei miatt azonban, ő nem szedte ezeket egy egységes rendszerbe. Talán a szerencse is közrejátszott akkor, amikor a halála után a megmaradt kéziratokat a marosvásárhelyi katonai várparancsnok lefoglaltatja és utasítást ad, hogy rakják ládába és vigyék be a várba. Így lehet, hogy a fatális elkallódástól mentette meg

azokat. Miután belátták, hogy nincs bennük semmiféle katonai vonatkozású titok, ezek a ládák az egyik fészerből a másikba hányódtak. Újból csak szerencse, hogy végül is a Bolyaiak ősi iskolája, a marosvásárhelyi református kollégium ezeket a saját épületébe viteti, és ezzel a kéziratokat jóvátehetetlen károktól mentette meg. Amikor Bolyai János hírneve az *Appendix*-nek köszönhetően egyre emelkedik, a tudományos világ figyelme ezekre a kéziratokra is ráirányul, és Paul Stäckel német matematikus felbecsülhetetlen érdeme, hogy ezek matematikai vonatkozású főbb részei a századforduló idején nyomtatásban is megjelentek. Meg kell említenünk még azt, hogy ezek bizonyos rendszerezésére már maga Stäckel vállalkozott, és sok esetben igyekezett Bolyai időközben bevezetett, néhol eléggé nehézkes és szokatlan új szimbolikájával is megbirkózni. De gyakran csak az új gondolatokat rejtő kézirati anyag pusztá leközlését végzi el, anélkül, hogy a témák szerinti csoportosítást szem előtt tartotta volna. De úgy gondoljuk, szükségtelen kihangsúlyozni, hogy ezzel is óriási szolgáltatást tett nagy matematikusunk eredeti meglátásaink a megismertetése érdekében.

S mi történt azóta a matematikai tárgyú kézirati anyag értékelésével és további feldolgozásával? — Úgy tűnik, hogy Stäckel óta ezen a téren érdemleges előrehaladás nem történt. A további Bolyai-kutatás ezek értékelésénél is csak Stäckel meglátásaira és kommentálásaira támaszkodott, mivel ő volt az egyedüli szakember, aki ezekbe részletesebben és mélyebben bepillantott. Stäckel jelentős munkát végzett, de mindent felölelni és reálisan értékelni ő sem tudott. Így a kéziratokban hátrahagyott igazi szellemi értékek kidomborítása és helyes megítélése néha elsiklott, és így volt olyan is, ami a köztudatban tévesen honosodott meg. S mindez Bolyai János matematika-történeti jelentőségmegítélésének a kárára.

E kijelentés konkrét alátámasztására a sok közül csupán két tipikus példát ragadok ki.

V. F. Kagan jeles szovjet matematikus, az *Appendix* orosz nyelvű fordítója, aki sokat tett azért, hogy Bolyait a Szovjetunióban is megismerjék. „A nemeuklideszi geometria felépítése Lobacsevszkijnél, Gaussnál és Bolyainál” c. tanulmányában, e geometria logikai helyességének kérdését boncolgatva, többek között a következőket írja:

„Amikor a nemeuklideszi geometriát legalább elemi részeiben kifejtették, megalkotói előtt logikai helyességének, vagy amint ma mondjuk »ellentmondásmentesség«-ének a kérdése állott. A kérdés az volt: teljesen bizonyos-e, hogy semmilyen további kifejlesztés nem vezet ellentmondáshoz? Nem fér semmi kétség ahhoz, hogy Lobacsevszkij és Bolyai is sokat gondolkoztak erről, és ennek az érdekében olyan bizonyítékokat kerestek, amelyekkel szemben semmilyen ellenvetés nem hozható fel. A Bolyai halála után fennmaradt írásokban Stäckel felfedte azt az állítást, hogy ő (mármint Bolyai) megkapta az általa felépített geometria logikai helyességének igazolását, és hogy szándékában állt ezt a bizonyítást kifejteni. Azonban ennek a bizonyításnak sehol semmi nyoma nincs, még csak a vezérgondolatok sem maradtak meg Bolyai hagyatékában. Meg kell mondanunk, hogy maga ez a feljegyzés Bolyai életének utolsó évéből származik, amikor már elvesztette gondolkozásának világosságát és pontosságát. Aligha férhet kétség ahhoz, hogy az a meggyőződése, hogy megkapta a bizonyítást, illúzió volt.”

Majd ezt követően Kagan hosszasan fejt ki Lobacsevszkij e kérdésre irányuló meglátásait, eljutva a nagy orosz matematikus azon meggyőződéséig, hogy „az általa megállapított egyenletek, amelyek a derékszögű háromszög oldalait és szögeit kötik össze, magukban véve algebrailag ellentmondásmentesek és függetlenek nem lehet kétségbe vonni.” „Arra a meggyőződésére — írja továbbá Kagan —, hogy az általa

megalkotott geometria helyes, főképpen a határozott integrálok értékének meghatározására való alkalmazásban keres megoldást.”

Tehát az eddig, és így feltárt közleményeket olvasva, az Olvasó azzal a meggyőződéssel marad, hogy Lobacsevszkij e téren igen komoly lépéseket tett, míg Bolyai azon utalása, hogy megtalálta a megoldást — Kagant idézve — „csupán illúzió volt”.

Az ehhez hasonló megállapítások nemcsak Kagan tollából, hanem másoktól is olvashatók. És nem csoda. A Stäckel által szétszórta közölt szövegtöredékek egyikének vagy másikának egyedüli, izolált és kevésbé figyelmes elolvasása nem készítet arra, hogy messzire következtessünk, és ezáltal Bolyai ilyen irányban kifejtett meglátásainak valódi mélységét és jelentőségét felismerjük. De rakjuk csak össze rendszerező körülményekkel Bolyai ilyen témájú, kéziratban megmaradt kijelentéseit és bizonyításait. Egy csodálatos kis dolgozat kerekedik ki belőle, amelyből nem nehéz észrevenni, hogy Bolyai mily közel férközött a mai szemléletünkhöz. Megállapíthatjuk azt, hogy ő volt az első a világon, aki a modellmódszer alkalmazásával megtalálta a megoldás helyes útját! Ő az, aki kihangsúlyozza, hogy a különböző terekbe ágyazott speciális felületeknek megvan a maguk belső geometriája. A hiperbolikus térbe ágyazott paraszféra az euklideszi sík e térbeli modellje, s ebből Bolyai azonnal következtet is: az S -rendszer ellentmondásmentességéből a Σ (vagyis az euklideszi mértan) síkbeli ellentmondástalansága származik. Észreveszi azt is, hogy a kérdés teljes megoldásához az előbbi kijelentés fordítottjának az igazolására is szükség van, vagyis, létezen egy olyan euklideszi térbeli felület, melyen az S -rendszer valósuljon meg. Tehát csak a halála után jóval később felfedezett pszeudoszféra megtalálása maradt még hátra.

Kézírataiban bőven értekezik a k görbületi paraméterérték eldönthetlenségi problémájáról, valamint arról, hogy — ugyancsak a kéziratban általa kifejtett hiperbolikus trigonometria, és a már jól ismert szférikus trigonometria teljes formái hasonlósága, s az utóbbinak az *Appendix*-ben igazolt abszolút (vagyis az euklideszi párhuzamossági axiómától független) igaz volta miatt az S -rendszer ellentmondástalanságára következtethetünk. Az előbbiekből adódóan azt is észreveszi, hogy a hiperbolikus sík egy képzetes sugarú gömbként is felfogható. Lobacsevszkijt túllépve világosan megkülönbözteti a hiperbolikus síkgeometria és a hiperbolikus térgeometria ellentmondásmentességének a kérdését, hangsúlyozva, hogy ez előbbiből nem biztos, hogy következik az utóbbi.

Az az út, amely ezen a téren a napjainkig elért eredményeken nyugvó álláspontig vezet, az a Bolyai János által feltárt út. Tehát a saját eredményeire való utalás nem egy erőszakkal és alaptalanul beteg elméjűvé degradált ember ún. „illúziói”. Emiatt tartottam elengedhetetlenül szükségesnek, hogy Bolyai János ilyen irányú bizonyításokkal teli szövegrészleteit összegyűjtssem és rendezzem, és ezeket az „Ellentmondásmentességi vizsgálatok” címen mint egyik igen jelentős kis munkáját a nemrég megjelent könyvemben közöljem.

Arra vonatkozóan, hogy mennyire szükséges volt a kéziratban maradt Bolyai anyag, valamint ezek utólagos értékelésének újbóli átnézése, íme a második példa:

1848 őszén, a jogtalan elsajátítás gyanújától agyonmarcangolt Bolyai János, apja által végül is kézhez kapta Lobacsevszkij 1840-ben megjelent német nyelvű *Geometrische Untersuchungen*, magyarul *Geometriai vizsgálatok* c. művét. Amióta kultúreberek léteznek e Földön, kevesen vettek oly izgalommal kezükbe könyvet, mint akkor Bolyai János. Lázasan olvasásba kezd, melyet gyors jegyzetelés követ. Az általa írt matematikai szövegek túlnyomórészt német és latin nyelvűek, de ez esetben a remegő kezétől irányított toll magyar anyanyelvén örökítették meg áradó panaszait és észrevételeit. Az így egymásra tett lapokból egy vaskos kézirat bontakozott ki,

melyet Bolyai egyáltalán nem szándékozott nyilvánosságra hozni. Ez a közlésre nem szánt bizalmas szöveg talán a legfényesebben igazolja jellemének tisztaságát és mély, őszinte igazságszeretetét. Ott, ahol úgy látja, vetélytársáról a legnagyobb elismeréssel ír. Mivel ez a kézirati anyag is nagyon sok eredeti matematikai meglátást tartalmaz, a századforduló idején Paul Stäckel és a fordításban is segédkező Kürschák József úgy döntöttek, hogy ennek lényegesebb részeit mégis csak nyilvánosságra hozzák. *Észrevételek* címen így vált közismertté Bolyainak ez a munkája. Paul Stäckel Bolyai kritikai észrevételeit saját kommentálásaival kíséri, nagyrészt egyetértve a kifogásokkal és megjegyzésekkel. Van azonban Bolyainak egy erősebb hangú bírálata, amely a *Geometriai vizsgálatok* 27. paragrafusára vonatkozik. Itt nyomtatékosan állítja, hogy Lobacsevszkij — Bolyai kifejezését használva — „szarvashibát” követett el. Stäckel itt nem ért egyet Bolyaival és azt állítja, hogy bírálata alaptalan. Később, amikor 1950-ben Moszkvában az *Appendix* orosz nyelven is megjelenik, ezzel együtt (mivel Lobacsevszkijről van szó) az *Észrevételek* Stäckel és Kürschák által közzétett szövegét is közlik, melyhez maga a fordító, F. Kagan is hosszú megjegyzéseket fűz. Alátámasztja Stäckel állításait, majd oldalakat kitevő fejtegetései végén a következőket írja: „Bolyai nyilván észrevette ezt a dolgot (mármint hogy a 27. paragrafusban a testszöglet mértékét kifejező képletben egy bizonyos $1/2$ szorzótényező szerepelhet-e vagy nem), azonban figyelembe véve az ő ingerült állapotát, valamint Lobacsevszkijnek kevésbé precíz meghatározásait, alkalmat ad Jánosnak, hogy Lobacsevszkijt súlyos hibákkal vádolja. A valóságban nem létezik semmiféle hiba; csak hiányokról van szó, amelyeket — amint Stäckel is kimutatta észrevételeiben — Lobacsevszkij más műveiben kiegészített.”

Újból csak az, hogy amit Bolyai írt, az egy idegileg beszámíthatatlan ember terméke. Ez az a gyors és egyszerű érv, amellyel egy mondatban el lehet intézni mindazokat a meglátásait, amelyekkel valaki nem óhajt egyetérteni. Az igaz, hogy Bolyai zseniális alkotóereje idővel lényegesen csökkent, de tébolyodott nem volt. Már Alexits György akadémikus is hangsúlyozta, hogy olyan műveket, mint az élete alkonyán írt *Raumlehre*, zavarodott elmével nem lehet írni.

Világos, hogy Bolyai János tárgyilagos megítélésénél a Bolyai-kutatás ezekre az eddig meglevő megállapításokra és értékelésekre támaszkodhat, mely ráutaltság még kihangsúlyozottabbá válik, ha az illető kutató nem matematikus szakember. Eklatáns példaként jut kifejezésre ez az állapot Benkő Samunál, aki az 1968-ban megjelent „*Bolyai János vallomásai*” c. nagysikerű könyvében csak az alábbiakról számolhat be:

„S ahogy Bolyai olvasni kezdi a művet (mármint Lobacsevszkij *Geometriai vizsgálatok* c. munkáját), úgy hesseget el magától minden korábbi gyanakvást, s már nem erkölcsi vétség, hanem tudományos hibán akarja rajtakapni a vetélytárat. Sorra vizsgálja a *Geometrische Untersuchungen* paragrafusait, és melléjük állítja az *Appendix* gondolatmenetét. Igyekszik mindenbe belekötni, de mint a tudománytörténet kiderítette, helyes bíráló megjegyzései mellett sokszor túllő a célon, és igazságtalanul támad. Így például nem volt igaza, amikor azt állította, hogy a 27. cikkelyben a gömbháromszög oldalait π -vel hasonlítva össze »Lobacsevszkij szarvas hibába esik.«”

Mint tudománytörténeti érdekességet is, tüzetesen elolvastam Lobacsevszkij szóban forgó művét, és ennek keretén belül megkülönböztetett figyelemmel a 27. cikkelyt, majd ezt követően Bolyai kifogásait és észrevételeit, valamint Stäckel és Kagan ezzel kapcsolatos utólagos kommentálásait és megjegyzéseit. Furcsa meglepődéssel, de jóleső érzéssel állapítottam meg, hogy Bolyai János nem bíralt alaptalanul; kifogásai helytállóak és jogosak, tehát nem igaz az, hogy igazságtalanul támad. S ugyanakkor, Stäckel, majd Kagan azon állításai, miszerint Lobacsevszkij a 27.

paragrafusban semmiféle hibát sem követett el, nem fedik a valóságot. Ugyanis a 27. cikkelyben szerepel az a megállapítás, hogy ugyanazon gömb fél főköríveinek, valamint a félgömb felszínének mértéke π . Ilyen gömb, bárhogyan is vesszük, nem létezik, mivel ez már eleve ellentmond a hossz- és területegységek konvencionális kapcsolatának. Stäckel és Kagan nem értenek egyet Bolyai azon kifogásával sem, hogy itt a gömb sugarának a tisztázása is szükséges. Pedig az előbbi gömb esetében ez a követelmény mégiscsak elengedhetetlen, melynek keresése azonnal fényt vetne a hibás állításra. E paragrafusban mutakozó nemegyezés onnan ered, hogy Lobacsevszkij helytelenül jár el a lapszögmérésnél, melyet nem a neki megfelelő síkszöggel és innen eredően *ívmértékkel*, hanem a lapszög élén található középpontú gömbből a lapszög lapjai által kimetszett gömbkétszöggel, tehát *gömbfelületmértékkel* mér. Így a derékszögű lapszögnek megfelelő negyedgömbre egyszerűen rákényszeríti a $\pi/2$ értéket, s így lesz azon a gömbön, mely főköréinek mértéke 2π , az egész gömbfelszín mértéke ugyancsak 2π . A helyes mérési eljárás szerint a síkszöget és lapszöget ívmértékkel, a testszögletet pedig gömbfelületmértékkel mérjük. Ennek helyes volta a következő topológiai jellegű tulajdonságból is azonnal belátható: a síkban, annak egy pontjából kiinduló félegyenesek, valamint a térben egy adott egyenes által határolt félsíkok halmaza a körrel homeomorf alakzatok; ugyanakkor, egy pontból kiinduló térbeli félegyenesek sokasága a gömbbel homeomorf alakzat.

Ez a két kiragadott példa is talán meggyőzően érzékelteti, hogy mennyire szükségessé vált a kézirati anyag lelkiismeretes átnézése és a benne rejlő gondolatok reális értékelése és közzététele. Túl hosszadalmas lenne most itt az eddig feltárt matematikai vonatkozású anyag aprólékosabb elemzése. Ehelyett próbáljuk meg röviden, csupán 12 pontban összefoglalni az ezekben rejlő fontosabb eredményeket és meglátásokat.

1. Mint a bécsi katonai akadémia 17 éves hallgatója, Bolyai János egy igen elmés eljárást ad a szögharmadolás problémájának megoldására vonatkozóan. A följegyzés egy iskolai jegyzetfüzetben található, és a szerkesztésnél felhasználja az egyenlő oldalú hiperbola egyik ágát.

2. Az immár matematikatörténeti jelentőséggel bíró 1823. november 3-án írott temesvári levelében, melyben mámoros örömmel tesz apjának említést a parallelákra vonatkozó csodás eredményeiről, a binomiális sor összegének meghatározására ad egy újfajta, igen elegáns módszert, szem előtt tartva a konvergenciai követelményeket is.

3. A kézirati anyag hű bizonyítéka annak, hogy az *Appendix* megjelenése előtti években Bolyai János már tisztán látta az imaginárius egység, és ebből fakadóan a komplex számoknak az ő új geometriájában játszó jelentős szerepét. Ez vezeti őt a hiperbolikus függvények által használt alakjához, melyeket a trigonometriai szögfüggvényekből a napjainkban használatos módon származtat:

$$+ \sin + x, \quad \cos + x, \quad + \operatorname{tg} + x, \quad + \operatorname{ctg} + x,$$

mely származtatás eredeti kapcsolatban van a szférikus és hiperbolikus trigonometriai összefüggések megegyező formái hasonlóságával. E tulajdonság Bolyai ellentmondásmentességi vizsgálatainál is szerepet játszik.

4. A *Responsio* 8 paragrafusban, Hamiltonnal egyidejűleg a komplex számok elméletének algebrai megalapozását adja meg. Máskülönben ezt az egész kis dolgozatát századunk matematikáját jellemző nagyfokú absztrakció hatja át.

5. Több kézirátában lényeges kibővítést találjuk az *Appendix*-ben közzétett nemeuklideszi geometria gondolatainak. Ezek közül említsünk meg néhányat. A hiperbolikus síkbeli háromszög területképletére egy új levezetést ad; lényegesen elmélyíti a hiperszféra fogalmára és ennek tulajdonságaira vonatkozó ismereteket; ki-

hangsúlyozást nyer, hogy bizonyos felületeknek megvan a maguk belső geometriája; mint sajátos esetként, már előre megadta az állandó görbületű felületek geodetikus háromszögeire vonatkozó Gauss—Bonnet-féle területképletet, melynek általánosabb formáját később igazolták; egy igen elmés bizonyítását adja két olyan hiperbolikus geometriában szereplő állandó érték megegyezésének, melyeket Lobacsevszkij bizonyítás nélkül egyenlőeknek vesz (e két állandó érték közül az egyik az egymástól x távolságra futó párhuzamos és megfelelő paraciklusívek aránya, a másik pedig a

$\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi(x) \right]^{\frac{1}{x}}$ kifejezés, ahol $\pi(x)$ az x távolságnak megfelelő paralelszög).

6. Jelentősek és érdekesek azok a fejtegetései, amelyekben a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmát meghatározó képleteket vezeti le. Igen elmés az a négy módszer, melyekkel a kérdés megoldására törekszik. Számításai során eljut néhány elliptikus integrálhoz is, melyekkel sokat bajlódott. Amint Bolyai Farkasnak egyik Gauss-hoz írott leveléből is kitűnik, ez volt az egyik oka annak, hogy erre vonatkozó eredményeit János nem vette be az *Appendix* szövegébe.

7. A *Raumlehre*-ben az egész geometria épületének hézagtalan, szabatos megalapozására és felépítésére törekszik, melyben az igen elmés meglátásai mellett, magát a célt is csak nagyra értékelni tudjuk.

8. A *Raumlehre*-hez csatolt cédulákon találjuk az irányítható zárt felületekre vonatkozó azon eredeti ötleteit és eszmefuttatásait, melyekkel valósággal előre látta a topológia jövőbeli kivételes jelentőségét. Ide sorolhatók még a gömbbel, valamint a torusszal homeomorf poliéderekre érvényes vizsgálatai is.

9. Már bővebben értekeztünk az *S*-rendszer ellentmondásmentességére irányuló kutatásairól. Ez is, és főleg az *Appendix*ben lefektetett egész geometriai rendszere a matematikai logika későbbi fejlődésmenetének egyik igen fontos forrásbázisa.

10. Zseniális megsejtéssel jelzi, hogy a fizikai gravitációs erőter és ennek mint megfelelő geometriai térszerkezet között szoros összefüggésnek kell lennie. Mint ismeretes, ezt a kapcsolatot 1916-ban Einstein mutatta ki konkrétan a híres tenzoregyenletében, mely reláció az általa kidolgozott általános relativitáselmélet egyik alapösszefüggését képezi.

11. Mint ismeretes, Bolyai Farkas egyik legjelentősebb eredménye a végszerű területegyenlőségre vonatkozó vizsgálatai és az ezzel kapcsolatos tétele. János, apja sugallatára, nagy erőfeszítéseket tesz az egyenlő térfogatú poliéderek végszerű egyenlőségének az igazolására. Vaskos kézirati anyag a tanúja annak, hogy sokat bajlódott ezzel a problémával. De amint a kézirati anyagból világosan kitűnik, sejti a helyes eredményt, miszerint a poliéderek esetében már nem mondható ki az apja által a síkbeli sokszögekre igazolt hasonló tétel.

12. Hogy Bolyai Jánost a geometrián kívül az algebrai problémák is érdekelték, a *Responsió*ban kifejtett gondolatokon kívül, a négynél magasabb fokú algebrai egyenletekre vonatkozó vizsgálatai is igazolják. A kora matematikai irodalmától elszigetelt tudós sajnos itt olyan kérdésekkel foglalkozott, melyekről az akkoriban épp megjelent közleményekből már eleve tudhatta volna, hogy fáradozásai hiábavalóak.

Alapos megfontoltsággal állítható, hogy Bolyai János vaskos matematikai vonatkozású kéziratai még rejtene magukban értékes, de mind ez ideig feltáratlan részeket. Meggondolkoztató ezen a téren az, hogy több mint egy évszázad alatt nem akadt egyetlen magyar szakember sem, aki ezek rejtelmeibe tüzetesen behatoljon. Aki ezen a téren lényeges munkát végzett, az egy német matematikus volt: Paul Stäckel. Ami az erre vonatkozó általam kifejtett tevékenységet illeti, egy őszinte vallomással tar-

tozom: az eddig végzett munkámmal távolról sem vagyok elégedett. Ugyanis — amint erre Benkő Samu is felhívta a nálunk megjelenő *A Hét* c. hetilap hasábjain a figyelemet — nem ártana újból aprólékosan átnézni legalább a Teleki—Bolyai könyvtárban található matematikai kéziratokat, és a szakmai felelősség tudatával kijelenteni, hogy mi értékes és mi nem a még nem közölt anyagból.

Egy objektív tény azonban fennáll, ami talán mentségül is szolgálhat az eddigi helyzetért, éspedig az, hogy ennek elvégzése roppant szellemi befektetést és időt követel; és nem utolsósorban komoly nyelvismereteket is. De bízunk abban, hogy a kitartó Bolyai-kutatás meghozza majd az eredményt.

Hogy mit jelent Bolyai János matematikai munkásságát a kéziratban maradt munkáinak a szerves figyelembevételével is — tehát nemcsak szigorúan az *Appendix* alapján — megítélni és tárgyalni, azt talán tudománytörténészünk, Vekerdí László soraival fejezhetem ki a legjobban: „Bolyai János kéziratok följegyzéseit és töredékeit figyelembe véve egész matematikai munkásságának hátterében az *Appendix* is másként látszik: eltolódnak eddigi hangsúlyok, színeződnek és új értelmet nyernek centrális részletek. Hosszú ideig Bolyai János nagy felfedezéséül a párhuzamosok kétezere esztendő problémájának megoldását tekintették, a nemeuklideszi geometria — Gauss-szal és Lobacsevszkijel egyidejű — kidolgozását. Nem alaptalanul, hiszen munkássága ezt is tartalmazza.” A kézírataiban maradt nagyszerű eredményeinek a figyelembevétele is „kiszabadítja Bolyait a paralellák börtönéből, s megmutatja azt a mérhetetlenül tágasabb teret, amit lángelméje túl a paralellákon a matematikai gondolkodás egész világába nyitott. A paralellák inkább csak ablak volt, amelyen keresztül bepillantott ebbe a csodálatos, új, más világba, a modern matematika világába. Ha csak a *Responsiót* lapozzuk át, láthatjuk, hogy Bolyai az elemek és műveletek elvonatkoztatásával és általánosításával olyan gondolatokra jut, melyekben lehetetlen, hogy ne érezzük századunk algebrájának egyik jellemvonását. Nem csoda, hogy nem értették meg, hiszen ő lényegében már absztrakt matematikai fogalmakat vett részre (és bővített tovább) ott, ahol a többiek még csak számokat, pontokat, egyeneseket, görbéket, felületeket láttak.”

És most kockáztassuk meg a kérdést: nemzetközi szinten mennyire ismert nagy matematikusunk neve és tudományos tevékenysége?

Császár Ákos akadémikus tollából a napokban olvastam egy igen tipikus és helytálló észrevételt, mely sajnos nem egyedi jelenség. „Találkoztam olyan amerikai matematikaprofesszorral — írja Császár Ákos —, aki, mikor hallotta tőlem, hogy a magyar matematikai társulatot Bolyai Jánosról nevezték el, megkérdezte: ki az a Bolyai János?”

Az én saját tapasztalataim alapján, csak alátámasztani tudom Császár Ákos megjegyzésének helytállóságát.

Az ezzel kapcsolatos igazság, hogy mindannyian keveset tettünk nagy matematikusunk nemzetközi megismertetése érdekében. Ilyen értelemben nagyon nagy szükségét látom egy angol nyelvű Bolyai-monográfia megjelentetésének. E nemes cél megvalósításának eredményei talán indokoltá tennék az esetleges anyagi áldozatokat is, s ugyanakkor az eddig megjelent magyar nyelvű szelektált kész Bolyai-anyag ügyes ollózása nagy segítségére lehet az ezzel megbízott szerkesztőknek.

És végezetül Bolyai János munkásságával kapcsolatban még csak egy dologra térnék ki. Kézíratai, valamint egész életműve mintha filozófiai okfejtéseket is tartalmazna. Ezek értékelésére Tóth Imre és Benkő Samu már tettek lépéseket. Nem rendelkezem filozófiai képzettséggel, de úgy érzem, hogy a komplex Bolyai-kutatásnak talán erre is figyelemmel kellene lennie. Ilyen vonatkozásban örömmel vettem a ke-

zembe egy „Bolyai János életművéről” szóló kis brosrát, mely Nagy Ferenc szerkesztésében tartalmazza mindazokat az előadásokat, melyeket a magyarországi KISZ-fiatalok egy csoportjának tagjai az *Appendix* megjelenésének 150. évfordulója alkalmából a múlt év őszén a berlini Magyar Kultúra Házában rendezett Bolyai-emlékülésén olvastak fel. Csak örvendeni tudunk, hogy ilyen irányból is megpezsdült a Bolyai-kutatás.

Adózzunk még néhány percet a kegyeletnek, képzeletben pergersük vissza az irreverzibilis időt, és szóljunk néhány szót a bölcsőhelyekről és azok mai emlékeiről. Egy kis Szeben megyei erdélyi falu Bolya, az ősi fészek. Itt született Bolyai Farkas is. János már Kolozsváron látta meg a napvilágot, abban a városban, ahol a nagy Mátyás királyunk született. A fiatal Bolyai család első lakhelye Domáld, abban az időben csak néhány viskóból álló isten háta mögötti kis helység, ahol Farkas családi örökségként kapott 12 holdas kis birtoka terült el. De csak három évig, mivel Farkas mint a marosvásárhelyi kollégium professzora 1804 tavaszán beköltözik Marosvásárhelyre. Később János, a katonaság után hosszabb időre Domáldon húzódik meg. Kézzelfogható Bolyai-emlék ma Domáldon csak János édesanyjának, Árkosi Benkő Zsuzsannának a sírja. Halála előtt néhány héttel a súlyosan beteg asszony megígérteti Bolyai Farkassal, hogy ha meghal, akkor őt Domáldon temetteti el, mert ott volt életében a legboldogabb. Férje tiszteletben tartotta az ő végakarátát. A szerencsétlen asszony még a helyet is megjelölte. Az ősi birtok egyik kiugró domboldalát választotta örök nyugvóhelyéül, ahová Farkassal valamikor, szép idő esetén, együtt jöttek fel kávézni és a tájban gyönyörködni. A sírhely, mely nem temetőben van, idővel a felismerhetetlenségig egybeolvadt a környező legelővel. A század elején, az ottani öregek szájhagyománya szerint már csak egy erősen korhadt faalkotmány jelölte meg ezt a helyet. Az 1973/74-es iskolai évben, a székelykeresztúri líceum tanulóinak egy csoportja, Illyés Ferenc nevű fizikatanáruk kezdeményezésére, cserefából egy gyönyörű kopjafát faragott Benkő Zsuzsanna sírjára. A hosszas hercehurca után, Benkő Zsuzsanna halálának 160. évfordulója alkalmából, 1981 szeptemberében, a saját költségemen végül is felállítottuk a kopjafát, a székely faragóművészet e ki-mondottan szépnek sikerült példányát. Az új síremlék szépen illeszkedik be a tájba, s a kis falu majdnem minden pontjából látható.

A két Bolyai városa azonban mégiscsak Marosvásárhely. Járva e Maros menti város régebbi útjait, a főtértől emelkedő Bolyai utcán elérkeünk az ősi volt református kollégiumhoz, ahol valamikor a világhírű professzor apa tanított, és ennek zseniális fia tanult. E iskola kezdetleges kis nyomdájából került ki Farkas több műve mellett a *Tentamen* és az ehhez csatolt *Appendix*. Az iskola szomszédságában található az az épület, melynek homlokzatán elhelyezett emléktábla figyelmezteti az erre járókat arra a helyre, ahol valamikor az ősi Bolyai ház volt. Itt élt Farkas több, mint egy fél évszázadon át, és János itt töltötte gyermek éveit. A kollégium századunk elején épült új, impozáns épületével szemben a két Bolyai szobra, ettől alig 100 m távolságra a Teleki-téka, ahol tudománytörténetünk e két büszkeségének kézíratait őrzik. Innen nem messze a katolikus és református temetők között a Somostető felé emelkedő volt Kálvária utca, mely emléktáblával meg nem jelölt egyik épületének helyén állt az a rozoga kis ház, melyben Bolyai János utolsó élet éveit töltötte, és melyben 1860. január 27-én meghalt. Annak idején Marosvásárhely nyárspolgárai nem is sejtették, hogy kit veszítenek el ebben a visszavonult és szinte mindenkitől elhagyott emberben. A kötelező kis létszámú katonai kíséreten kívül csupán három városi lakos kísérte el utolsó útjára. Még jelet sem tettek a sírja fölé. 33 év után Schmidt Ferencnek kell Budapest-ről Marosvásárhelyre utaznia, hogy felkutassák Bolyai János szinte az örök feledésbe merülő sírhelyét. Schmidt Ferenc felhívására a Matematikai és Fizikai Társulat gyűj-

tési akciót indított, és így sikerült előteremteni azt az összeget, mely egy egyszerű sírkő felállításához szükséges volt.

De ma már Marosvásárhelyen — bár megkésve — elevenen él a két nagy tudós emléke. Megtanultuk tisztelni világklasszis nagyjainkat. Lelkes pedagógusok is akadnak, mint például Filep Etelka, a Bolyai Farkas Líceum matematikatanárnője, akinek minden diákja Bolyai-füzettel rendelkezik. Ebben gyűjtik össze a tanulók a Bolyaiakról szóló kivágott cikkeket, ide írják le a róluk írt saját gondolataikat és tanulmányaikat, itt kapnak helyet az általuk készített vagy máshonnan összeszedett fényképek és fotókópiák.

Minden év november elsején, halottak napján, amikor az élők megemlékeznek elhunyt hozzátartozóikról, megragadóan szép ünnepi köntösbe öltözik a marosvásárhelyi református temető is, ahol egymás mellett a két Bolyai alussza örök álmát. Hozzátartozó leszármazottaik már nem élnek Marosvásárhelyen, de sírjuk, melyet virágerdő övez, fényárban úszik. Százával gyúlnak ki a gyertyák, melyeket az idővel elégettek helyére az egymás utáni és szűnni nem akaróan lenyúló kezek helyeznek el. Minden ilyen világító gyertyalángban, a város idesereglett lakóinak e génuszok iránti megkésett tisztelete, valamint egy néphez és nemzethez fűződő néma, görcsös ragaszkodása ég. De végül is, az éjfélbe hajló sötétségben, a még megmaradt csonkává égett gyertyák fel-fellobbanó utolsó lángjai is kialszanak, s a lassan elnéptelenedett temetőben csak a Somostető irányába tartó hideg novemberi szél érzékelteti az idő könyörtelen múlását.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАБОТАХ ЯНОША БОЙАИ ОСТАВЛЕННЫХ В РУКОПИСИ

ТИБОР ВЕСЕЛИ

ON THE MATHEMATICAL WORKS OF JÁNOS BOLYAI LEFT IN MANUSCRIPT

T. WESZELY