

AZ APPENDIX HATÁSA A MODERN MATEMATIKÁRA

RAPCSÁK ANDRÁS

Tisztelt ünnepelő közönség!

Az előző előadásokban hallhattunk Bolyai Farkas és Bolyai János életéről, arról a döntő jelentőségű felfedezésről, amelyet Bolyai Jánosnak köszönhet a világ. Ezzel az eredménnyel sikerült azt a több mint 2000 éves problémát megoldani, amely Euklidesz óta a geometerek kutatásának keresztútjába állt. Hangsúlyoznunk kell, hogy itt nemcsak magát a megoldást tekintjük alapvetőnek, hanem a megoldás módját is. Bolyai János világosan látta, hogy ha a tér geometriai tulajdonságait akarja vizsgálni, ehhez feltétlenül a modellmódszerhez kell folyamodni. A teret modellekkel kell megközelíteni, és a modell annál jobban leírja a tér tulajdonságait, minél jobban teljesülnek a modellben a tér elemei közötti összefüggések. Nagyon világosan látszik mindez abból a levélből, amelyet apjának írt: „Semmiből egy új, más világot teremtettem”. Ebből az következik, hogy Bolyai János geometriájának megalkotásánál a valóságos tér tulajdonságait akarta meghatározni, s így jutott el az Euklidesz modell mellett a hyperbolikus modellhez. Említsük meg, hogy ez a szemléleti mód a XVIII. század végén és a XIX. század elején szinte a levegőben volt. Hiszen akkor Kant tér és idő elmélete még teljesen új volt, s emiatt is szükséges volt az euklideszi tér-fogalom kritikai felülvizsgálatára. Kant ugyanis a Tiszta Ész Kritikájában kimondja, hogy a tér és idő akkor és csak akkor szemléleti forma, ha vannak a priori szintetikus ítéletek. Kant bizonyít: a matematikai és geometriai tételek a priori szintetikusak. Kant példája: az, hogy két pont között legrövidebb távolság az egyenes, a priori szintetikus. Ez helyes is volna, ha a térben abszolút euklideszi geometria volna érvényes. Ekkor ugyanis az egyenes fogalma a priori lenne. Bolyai János felfedezése ezt, a Kant által ragyogóan felépített épületet döntötte le. A hyperbolikus geometria tehát nemcsak a matematikára, hanem a filozófiára is alapvető hatású volt.

Ami a hyperbolikus geometria felfedezésének a matematika fejlődésére való hatását illeti, ilyen rövid idő alatt csak a legfontosabb csomópontokat lehet áttekinteni, s ezek közül is elsősorban a geometriákat. Természetesen mindenekelőtt Riemann munkásságáról kell bővebben szólnom. Ő volt az, aki legelőször vette boncsész alá, vizsgálta egész mélységében a tér struktúráját, s a lehetséges geometriákat. Meg kell jegyeznünk, hogy Riemann munkáiban nem említi Bolyai nevét, (sem a Lobacsevszkijét) azonban biztos, hogy mindkét geometer munkáját ismerte, s eredményei többek között az említett két matematikus munkáinak hatására alakultak ki. Riemann térelméletét 1854-ben dolgozta ki, s olvasta fel magántanári próbaelőadás-ként a göttingeni egyetemen. Érdeességként meg kell említeni, hogy Gauss javaslatára tüzték ki ezt a témát, amelyet Riemann három előadás közül a harmadiknak jelölt ki. Előadásában Riemann foglalkozik a tér fogalmával, mint n -dimenziós sokasággal. Kiderül: már látta, a teret, anyagot és mozgást nem lehet elválasztani. Hogy a teret közelebbről megismerhessük, mérni kell. Megállapítja, egy görbe ívhosszának

olyan függvénynek kell lenni, amely $\dot{x}^i$ -ben elsőfokú pozitív homogén. Az összes lehetséges kifejezések közül kiemelni a

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

alakúakat. Nyilván azért ezeket választotta, mert az euklideszi térbe ágyazott felületi görbék ívhossza is így állítható elő. Az itt szereplő $g_{ij}(x)$ függvények szimmetrikusak, és triviálisan minden rögzített x^i pontban pozitív definit quadratikusan együttműködő rendszere. A Gauss által bevezetett E , F , G felületi függvények egyszerűen a megfelelő g_{ij} mennyiségekkel egyenlők. Azokat a sokaságokat, melyek koordinátatranszformációval

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$$

alakúra hozhatók, sík sokaságoknak nevezi. Már Riemann bevezeti a térgörbületet, s a szabad mozgathatóságot összeköti a konstans görbületű tér fogalmával. Még Riemann nevéhez fűződik az ún. elliptikus geometria megalkotása, ami természetesen egy speciális Riemann-tér. Ez abból a feltevésből vezethető le, hogy egy síkban egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő pontból nem húzható párhuzamos. Ebből adódik többek között a véges egyenes. A későbbiekben Dedekind, Beltrami, Christoffel, Killing stb. munkássága nyomán kiderült, hogy az általános Riemann-tér meghatározásához alapvetően hozzátartozik az ún. Riemann-féle görbületi tenzor, amelynek az eltűnése pl. a Riemann-terek közül az euklidesziet jellemzi.

A múlt század második felében — ugyancsak a Bolyai—Lobacsevszkij hatására vizsgálni kezdték a nem euklideszi geometria modelljeit. Ezen a területen Cayley, Klein és Poincaré szereztek elévülhetetlen érdemeket. Kiderült többek között, hogy a hiperbolikus geometriát a pszeudoszférán, az elliptikus geometriát a gömbfelületen lehet realizálni. Így lehet megérteni Riemann megjegyzését, miszerint nagy különbséget kell tenni a határtalan és végtelen között, mert pl. az állandó pozitív görbületű tér határtalan, de véges.

A következő, nagyobb csomópont, amiről néhány szót szólni kell, a csoportok és a geometria kapcsolata. Nem lehet tagadni, hogy a csoportelmélet fejlődéséhez a nem euklideszi geometriák, és a Riemann-tér megalkotása is hozzájárult. Elég, ha hivatkozom F. Klein erlangeni programjára és a Lie-csoportok szerepére a modern geometriában.

Minthogy Bolyai az euklideszi axiómarendszer felhasználásával végezte kutatásait, teljesen nyilvánvaló, hogy a modern axiómatikus módszerek kidolgozásában is nagy szerepet játszott az Appendix. Elegendő, ha csak Hilbertre hivatkozom, aki először állította össze az euklideszi geometria axiómarendszerét. Döntő fejlődést az jelentett, hogy Hilbert Euklidesszel ellentétben nem definiálta az alapfogalmakat és alapösszefüggéseket, hanem azt jelentette ki: ezekről is annyit tudunk, amennyit róluk az axiómák kimondanak. Ilyen módon sikerült Hilbertnek az euklideszi és nem euklideszi geometriák axiómarendszerét teljesen meghatározni.

Térjünk most vissza a szorosan vett differenciálgeometria fejlődéséhez. Miután kiderült az, hogy a Riemann-tér geometriája végeredményben azonos egy euklideszi térbe ágyazott felület belső geometriájával (ezt a tételt általánosan Whitney bizonyította be) felmerült a geodetikusok problémája, amely vonalak az egyenesek szerepét veszik át a Riemann-térben. A geodetikusok differenciálegyenlet-rendszere nyilván az $F(x, \dot{x}) = \sqrt{\sum g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$ függvény extramális serege. Tehát

$$\delta \int F \text{ geodetikus.}$$

Az $F(x, \dot{x})$ függvény Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszere

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0,$$

azaz

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j = 0;$$

innen

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0.$$

A $\Gamma_{jk}^i(x)$ az ún. másodfajú Christoffel-szimbólum. A Riemann-tér geometriáját tehát a $g_{ij}(x)$ szimmetrikus, másodrendű tenzor segítségével ki lehet építeni.

A Riemann-tér vizsgálata — különösen a tenzorszámítás kialakulása előtt, — igen körülményes volt. Nagy lépést jelentett mind a könnyebb kezelhetőség, mind a tér mélyebb megismerése szempontjából a Levi—Civita által bevezetett párhuzamos-ság fogalma. Tulajdonképpen egy felületi párhuzamossági definíciót általánosított. Tekintsük ui. a felületen egy x^i pontban az érintősíkot, s ebben egy vektort. Kössük össze a felületen a $P(x)$ pontot egy P' ponttal görbével. Határozzuk meg ennek a görbének az érintőfelületét, fejsük ezt le a síkra, a P' pontban a P pontbeli vektorral párhuzamos vektor felületi eredetijét nevezzük az adott vektorral párhuzamos vektornak. Általánosítva: egy $\lambda^i(x)$ vektor az $x^i = x^i(t)$ görbén párhuzamos, ha

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{x}^k = 0.$$

A Levi—Civita szerinti párhuzamosság segítségével most már könnyen lehetett az általánosított terekben konnexitét létesíteni, amelyhez csak az érintőtereket kell bevezetni. Ez a fogalom végeredményben Weyl névéhez fűződik. Könnyen belátható, hogy a geodetikus vonalak érintői a geodetikus vonalon párhuzamosak. Ez a jellegzetesség tulajdonképpen az egyenes egyik tulajdonságának közvetlen általánosítása.

Mint ahogy a Levi—Civita-féle párhuzamosság bevezetésénél a tér metrikus tulajdonságai végeredményben nem játszottak szerepet, s csak a Christoffel-féle szimbólumokat kellett felhasználni, lehet értelmezni a nem metrikus differenciálgeometriai tereket. Ehhez csak az szükséges, hogy legyen a térben értelmezve eltolási paraméter segítségével egy konnexió. Ennek a konnexiónak a felhasználásával értelmezhetem a párhuzamos eltolást, s meghatározhatom azokat a görbéket, amelyeknek az érintői a görbére nézve párhuzamosak. Ezek a görbék a geodetikus vonalak nem metrikus esetre való általánosításai. Nevük: autoparalel görbe.

Ezeket a tereket affinösszefüggő tereknek nevezzük.

A Bolyai és Lobacsevszkij munkásságával megkezdődött geometriai kutatás jelentős állomásához érkezett a XX. század második évtizedében. Caratheodorynak, a neves német matematikusnak egy Paul Finsler nevű doktorándusa bizonyos variációprobléma kapcsán egészen új tértípushoz jutott el. Emlékeztetem a tisztelt hallgató ságot arra, hogy már Riemann is gondolt ilyen valamire, azonban azt tette fel, hogy a $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ legyen, mert hiszen úgy lesz a tér az euklideszi felület általánosítása. Finsler általánosabban azt tette fel, hogy a tér egy $x^i = x^i(t)$ görbéjének ívhossza legyen

$$s = \int_{t_0}^t L(x, \dot{x}) dt,$$

ahol az L függvényről természetesen több követelményt kell megkívánni. Az L varációs seregét itt is geodetikuskoknak nevezzük, amelyek differenciálegyenletrendszerre

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x}) = 0,$$

ahol

$$G^i(x, \dot{x}) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n g^{ik} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j} \dot{x}^j - \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^k} \right).$$

Itt

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k},$$

s a g_{ik} ismét pozitív definit, tehát van inverze. Legyen a g^{ik} a g_{ik} inverze, tehát

$$\sum_i g_{ik} g^{ij} = \delta_k^j.$$

Ezeknek a mennyiségeknek a segítségével építette fel Berwald a Finsler-geometriát a huszas években. Egy nagy különbség azonban adódott a Riemann-féle geometriával szemben. Ha a G^i függvényekkel definiálom a párhuzamosságot, a vektor hossza megváltozik párhuzamos eltolásnál. Ezen a nehézségen segített Élie Cartan, aki a harmincas évben teljesen kidolgozta a Finsler-tér geometriáját. Alapgondolata az volt, hogy ponttér helyett ún. vonalelemteret tekintett, s ebben határozta meg az alpmennyiségeket. Ilyen módon szinte természetesen adódott olyan eltolási konnexiók együttható, amelynek segítségével definiált párhuzamos eltolás euklideszi, azaz a vektor hosszát változtatlanul hagyja. Kiderült, hogy ebben a térben három görbületi tenzor van, amelyek eltűnése, vagy speciális alakjai különböző egyszerűbb tértípusokat jellemeznek. Ezek közül talán érdemes megemlíteni a Minkowski-féle teret. Ezek olyan terek, ahol a geodetikuskok megfelelő koordináta-rendszer bevezetésével lineáris formában állíthatók elő, azaz a geodetikuskok egyenesek. Mivel Riemann is foglalkozott előadásában ilyen terekkel, a Minkowski-terekhez kell kapcsolni azokat a tereket is, amelyek geodetikusan ilyenekre leképezhetők. Ezek az ún. síkprojektív terek. A Finsler-térben is lehet skalárgörbületű, konstans görbületű tereket definiálni, s természetesen a Riemann-tér is speciális Finsler-tér.

A Finsler-geometria Cartan-féle megalapozása után a differenciálgeometriai terek igen sok általánosítása látott napvilágot. Már maga Cartan vizsgált olyan teret, ahol a pont és a hozzá tartozó felületelem a térmeghatározó. Még tovább általánosít Kawaguchi japán geométer, aki magasabb rendű variációs problémából indul ki, s ebből határoz meg differenciálgeometriai teret.

Az eddigiekből is látszik, hogy a differenciálgeometriai terek esetében beszélünk alaptérrel, érintő vektor térrel, konnexióról, de mindig lokálisan, s a terek globális tulajdonságait nemigen vizsgálták. Ezeket a nehézségeket küszöbölte ki az Ehresmann és követői kutatásával kezdődő ún. globális differenciálgeometria. Ők először definiálták az ún. differenciálható sokaságot, azaz olyan halmazt, amely minden pontjának van az euklideszi egységömbbel homeomorf környezete, s az ilyen módon definiált koordináták transzformációja differenciálható. Látható, hogy az ilyen vizsgálat az addigi kutatásoknál sokkal mélyebben felhasználja a topológiát, sőt bizonyos tekintetben a topológia fejlődését is előmozdítja. Rendeljünk ennek a sokaságnak minden pontjához egy, a sokaság dimenziószámával azonos dimenziójú vektorteret, amelyen értelmezünk egy lineáris csoportot. Végeredményben ez fogja létrehozni a konnexiót. A most felvázolt globális differenciálgeometria természetesen csak a leg-
elemibb összefüggéseket mutatja meg. A máig kiépült elmélet a most bemutatottnál

sokkal összetettebb. A pontokhoz nemcsak érintő vektorteret, hanem pl. repert rendelünk, s akkor ez az új komplexus is tekinthető differenciálható sokaságnak. Ilyen módon a differenciálgeometriai tereknek új összefüggéseit sikerült feltárni, sőt sok esetben olyan alapvető tételeket lehetett kimutatni globális eszközökkel, amelyeket lokális eszközökkel nem, vagy csak nagyon nehezen sikerült volna. A globális differenciálgeometriai kutatások a modern térelméletben igen széles és mély perspektívát tárnak fel, s ezért a modern differenciálgeometriai vizsgálatok ebben az irányban szélesednek ki.

A hiperbolikus geometria bevezetése a fizikai kutatásokban is éreztette hatását. Elegendő itt csak Einsteinre és munkájának folytatóira hivatkozni, akik a világtérben ható geometriát Riemann-félének tételezték fel. Természetesen arra nincs időm, hogy az itt említettekről részletesen szójak, mégis röviden szeretném felvázolni a modern térelmélet és a tér tényleges struktúrája közötti mélyebb kapcsolatot. Ez arra is példa, hogyan lehet — legalábbis a metrikus tér — tulajdonságait ilyen módon meghatározni. Ez a gondolatmenet egyelőre csak lokálisan érvényes, de globálisan is meg lehet vizsgálni.

Tekintsünk ugyanis egy n -dimenziós differenciálható sokaságot, s abban egy másodrendű differenciálegyenlet-rendszerrel megadott görbesereget:

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x}) = 0.$$

A G^i függvényekről differenciálhatóságot (elég sokszor) és másodrendű pozitív homogenitást (az $\dot{x}$ -ban) tételezünk fel. Vizsgáljuk meg, mikor variációs extrémális sereg az adott görbe halmaza. Más szóval létezik-e olyan $L(x, \dot{x})$ reguláris variáció problémához vezető függvény, amelynek az adott görbék extrémálisai. Ez nyilván a variáció inverz problémája. Egyébként ezt két dimenzióban Darboux vizsgálta és mutatta ki, hogy mindig van ilyen L függvény, három dimenzióban pedig Douglas mutatta ki, hogy csak kivételes G^i függvények esetében van megoldás. Arról van ugyanis szó, hogy az $L(x, \dot{x})$ függvény Euler—Lagrange differenciálegyenlet-rendszerében ismeretlen függvénynek tekintem az L -függvényt, és ismertetek a G^i -ket. Ez L -re nézve másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer, amelynek csak azok a megoldásai vehetők tekintetbe, amelyek kielégítik azokat a feltételeket, amelyeket egy differenciálgeometriai tér alapfüggvényétől megkövetelünk. Rögtön látható, ha egy megoldás van, végtelen sok van, amelyek egymásra pályatartóan (geodetikusan) leképezhetők. Ha találunk ilyen függvényt, akkor világos, hogy az adott görbesereghez hozzárendelhetjük azt a geometriát, melynek a kapott L az alapfüggvénye. Ilyen módon tehát egy adott görbesereghez általában több geometria tartozhat, amelyek azonban geodetikusan azonosak.

A tér tényleges geometriájának a meghatározásánál induljunk ki egy mozgásból. A térben mozgó pont nyilván meghatároz egy pályarendszert. Ha ehhez a pályarendszerhez meghatározom azt a geometriát, melynek az adott pályarendszer a geodetikussait alkotja, meghatároztam azt a geometriát, mely az adott mozgáshoz tartozik. Ilyen megközelítéssel tehát azt mondhatjuk, a térnek nincs egységes geometriája. A geometria a mozgástól függ s minden mozgáshoz más és más geometria tartozik. Ilyen módon tehát a mozgáshoz tartozó differenciálgeometriai tereket is teljesen meg tudják határozni. Az itt vázoltakat globálisan is lehet tárgyalni, csak a globális variációszámítást kell felhasználni (Moorse-elmélet).

Előadásom végére értem. Igen sok említésre érdemes eredményt, kutatási irányt nem, vagy csak érintőlegesen tárgyaltam, mentségemre szolgál a rendelkezésemre bocsátott idő rövidsége. Engedjék meg azonban, hogy ha csak név szerint is, de meg-

említsem azokat a magyar kutatókat, akik Bolyai örökét folytatva tudományos eredményeket értek el ezeken a területeken.

A differenciálgeometria területén Varga Ottó körül bontakozott ki széles iskola, amelynek hatása az ország minden matematikai centrumába kisugárzott. Ennek az iskolának tagjai akár közvetlenül, akár közvetve Farkas Miklós, Makai Imre, Merza József, Moór Arthur, Nagy Péter, Soós Gyula, Szabó Zoltán, Szolcsányi Endre, Szenthe János, Tamássy Lajos és az itt említettek tanítványai. A fizikai alkalmazás területén Horváth János és Toro Tibor ért el eredményeket.

Az axiomatika, a modellelmélet, a diszkrét geometria a Bolyai Hagyaték vizsgálatán és a hiperbolikus geometria egyéb területén a következő magyar kutatók érték el eredményeket:

Alexits György, Benkő Samu, Böröcki Károly, Dávid Lajos, Fejes Tóth László, Gyarmathi László, Kárteszi Ferenc, König Gyula, Kürschák József, Molnár József, Privorszki Alajos, Réthy Mór, Schlésinger Lajos, Strommer Gyula, Szász Pál, Szénássy Barna, Szőkefalvi Nagy Gyula, Vályi Nagy Gyula, Vörös Cirill, Weszely Tibor.

ВЛИЯНИЕ АППЕНДИКСА НА СОВРЕМЕННУЮ МАТЕМАТИКУ

АНДРАШ РАПЧАК

THE INFLUENCE OF THE APPENDIX FOR MODERN MATHEMATICS

A. RAPCSÁK