

AZ APPENDIX ELŐZMÉNYEI ÉS TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEI

KÁRTESZI FERENC

Mélyen tisztelt hallgatóság! Előadásomat nem a matematikusok, hanem az érdeklődő kívülállók tájékozottságához igazítom.

Az előadás címének bírálatával kezdem mondanivalóim kifejtését.

Bolyai János matematikai tárgyú írásait a magvas tömörség jellemzi. Világraszóló művének azonban nem választott rövid címet. A címoldalon a cím szerepét az értekezés tartalmát vázoló több soros szöveg játssza. Ennek első szava arra utal, hogy a mű egy könyv függelékeként jelent meg. Ezért terjedt el az a szokás, hogy a nevezetes műre hosszú címe első szavával utalunk.

A hosszú címoldal és a tömör belső szöveg közti ellentét máris tűnődésre késztet. Bolyai nyilván előre figyelmeztetni akarta az olvasót, hogy értekezésében a két évezreden át megoldatlan probléma tisztázásáról van szó, mégpedig egy az euklideszi geometriával nem azonos geometria megalapozása útján.

Euklidész óta közfelfogás volt, hogy egyedül az euklideszi geometria igaz. Bolyai előtt a kutatások arra irányultak — még ha meg is közelítették a nem-euklideszi geometria felfedezését, — hogy az euklideszi geometria kifogástalan megalapozásával az annak egyedül helyes voltát elfogadó hiedelmet megerősítsék. Ez a hiedelem még Kant elméjét is rabul ejtette. Ez volt az oka, hogy a kortárs olvasók Bolyai elméletét kezdetben gyanakodva fogadták, általában nem is értették. Bolyai e tény tudatában szükségesnek tarthatta, hogy már a címoldalon figyelmeztesse az olvasót az olvasnivaló szokatlan nehézségeire, és arra, hogy Kantnak a térre vonatkozó tézise nem igaz.

Az új geometriának mások igyekeztek rövid nevet adni, s azok az idők folyamán megszokottá is váltak. Gausstól ered a *nem-euklideszi geometria*. Kleintől a *hiperbolikus geometria*. Frischauftól⁽¹⁾ az *abszolút geometria* és közmegállapodásból a *Bolyai—Lobacsevszkij-geometria* elnevezés. Előadásomból majd kitűnik, hogy az Appendix tartalmának legpontosabban a Frischauftól eredő elnevezés felel meg.

* * *

A görögök szerint — Euklidész korában — az érzékszervek közvetítette ismeretek csak árnyképei a valóságnak, amit csak gondolkodásunkból eredő tudatunk foghat fel a maga tisztaságában. A görög szellemnek ez az idealista orientációja érvényesült a több ezer éven át felhalmozódott geometriai ismereteket tudománnyá szervező Euklidész művében.

¹ Johann Frischauf egyik könyve *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai* címen jelent meg 1872-ben. Az volt az „abszolút geometria” elnevezés forrása.

Euklidész módszere — a definíciókból, axiómákból és posztulátumokból kiinduló, szigorúan deduktív tárgyalás — olyan fegyelmezett gondolkodást fejlesztett ki, amely mintául szolgált a később kialakuló tudományok számára. Az euklideszi alapok elleni kifogások.

Csak a múlt század végén váltak a tudományos kutatások közérdeklődést újjáébresztő témáivá. A párhuzamosság euklideszi posztulátumának bíráló, elemző vizsgálata már az ókorban elkezdődött ugyan, de két évezreden át lényeges eredmény nem mutatkozott. Ezek a kutatások csak megerősítették azt a közhiedelmet, hogy a tér fogalmát jellemző euklideszi axiómarendszer az egyedül helyes, ami csupán finomításra, egyszerűsítésre, kiegészítésre szorul.

Az első figyelmet érdemlő kommentátor Proklosz volt (az V. században). Ő az euklideszi párhuzamosság szögfogalomtól függetlenített formáját találta. — Vagyis az euklideszi és a Proklosz-féle ekvivalens; azaz bármelyikből a másik mint tétel levezethető. — Mindkettőt idézem:

E: „Legyen megengedett, hogy egy sík két egyenesét egy harmadikkal metszve, annak azon az oldalán, ahol a belső szögek összege két derékszögnél kisebb, a két egyenes metszi egymást.”

P: „Egy síkon egy adott pontot és egy rajta át nem menő adott egyenest tekintve, a sík-nak a ponton átmenő egyenesei közül egy és csak egy nem metszi az adott egyenest.”

Proklosz világosan kifejezte, hogy két párhuzamos egyenes egy síkon van és nem metszi egymást. Az, hogy a ponton átmenő egyenesek közt van párhuzamos, a többi axiómából következik. Ámde az, hogy a ponton át csak egy ilyen egyenes halad — Euklidész szerint — a többi axiómából nem következik, ezért kell az *unicitást* külön axiómában feltételezni. Proklosz azonban — miként két évezreden át minden matematikus — azt hitte, hogy a többi axiómából a párhuzamossági axióma levezethető.

Annak a bizonyítása, hogy ez a posztulátum a többiből következik Proklosz művében is hibás, mint minden előbbi és utóbbi korban közölt bizonyítás. A meddő próbálkozásokban az volt a közös, hogy a bizonyításnak vélt következtetésbe valahol becsúszott olyan feltevés, amely az euklideszi posztulátummal ekvivalens. Hibás bizonyítást még 1818-ban is publikáltak olyan göttingeni kiadványban, amit Gauss is olvasott. — B. F. Thibaut hamis bizonyítására utalok. Gauss 1807 óta a göttingeni csillagvizsgáló intézetnek igazgatója és az egyetem tanára volt. —

Az előző évszázadban elért színvonalhoz viszonyítva Thibaut próbálkozása érthetetlen visszaesésnek tűnik. Bolyai előtt Saccheri és Lambert műve volt a legértékesebb. Az előbbi 1773-ban, az utóbbi 1786-ban jelent meg. Mindketten az euklideszi posztulátum indirekt bizonyítását vélték megtalálni.

Saccheri és Lambert egyaránt azt hitték, hogy a párhuzamossági posztulátum helyes és bizonyítható, s mindketten indirekt módon próbálták bizonyítani. Az euklideszi axiómarendszerben a párhuzamossági posztulátumot az ellenkezőjével helyettesítették. Ha e módosított axiómarendszerből kiinduló deduktív következtetés abszurd következményre vezet, akkor az abszurdum éppen azt bizonyítja, hogy Euklidész párhuzamossági axiómája igaz. A várt abszurdum helyett a nem-euklideszi geometria számos meghökkentő tételére jutottak, és azok közül nem egy olyant, amely az euklideszi geometria megfelelő tételétől élesen különbözik. Azt pedig, mint „a valóságban nyilvánvalóan abszurd állítást” tekintették. Persze a hamisnak vélt tétel nem a valóságnak, hanem a valóság euklideszi felfogásának mond ellent. Ez a súlyos tévedésük abból eredt, hogy az egyedül helyes geometria szerintük is az euk-

lideszi. Az ő általuk elért színvonalat a későbbi, de Bolyai előtti kutatók se szárnyalták túl, kivéve Gauss nem publikált eredményeit. Erről külön kell megemlékeznünk.

Mik azok a dokumentumok, amelyekből Gauss eredményei láthatók, illetve amelyekből sejthetők?

1. A következő személyekhez írt levelei: Wachtler (1818), Gerling (1819), Taurinus (1824), Bessel (1829), Schumacher (1831), Bolyai F.

2. Életében nem publikált, de hagyatékában talált feljegyzései.

3. *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) című műve.

Saját nyilatkozata szerint már 30–35 éve foglalkoztatták azok a problémák, amelyeknek megnyugtató tisztázásában Bolyai János őt megelőzte.

Gyelonye szavait idézem: „Gauss, amint ez munkáiból kitűnik, sokmindent végiggondolt ezzel kapcsolatban, de semmit sem publikált.”

Az eddig vázolt előzményekből elképzelhető, hogy Bolyai korában milyen legyőzhetetlen nehézségűnek tűnt a két évezrede izgató probléma megoldása. *A matematika filozófiájának kellett megváltoznia, hogy a kutató szellem rátaláljon a megoldás útjára.*

Mi volt hát az Appendix célja és programja?

Cél a párhuzamossági posztulátum többitől független voltának indirekt bizonyítása.

Évégből a párhuzamossági posztulátumot törölve *a maradék axiómarendszerre* felépítette az így általánosított geometriát. — Ezt nevezzük *abszolút geometriának* — Ha a maradék axiómarendszert kibővítjük a párhuzamosság euklideszi posztulátumával, vagy annak tagadásával akkor az abszolút geometria specializálódik, mégpedig euklideszi, illetve anti-euklideszi geometriává.

Bolyai volt az első, aki bátran kimondta, hogy az anti-euklideszi geometria éppen úgy *ellentmondástalan*, mint az euklideszi; a két évezrede vajdó „bizonyítási próbálkozások” tehát nem is vezethettek eredményre. (Bolyai felismerte az ellentmondástalanság bizonyításának szükségességét is, de a bizonyítás csak másoknak sikerült, Bolyai halála után.)

Felvetődött a kérdés, hogy a valóságos tér szerkezetét az euklideszi, vagy az anti-euklideszi geometria tükrözi-e tökéletesebben. — Tudjuk, hogy evégből Gauss geodéziai, Lobacsevszkij asztronómiai méréseket is végeztek. — Bolyai helyesen állította, hogy ennek a kérdésnek a tisztázása nem a matematika feladata. A fizika pedig optikai eszközök segítségével nem tudja ezt a problémát tisztázni. A matematikára csak annak a kérdésnek a tisztázása vár, hogy az anti-euklideszi geometria ellentmondástalan.

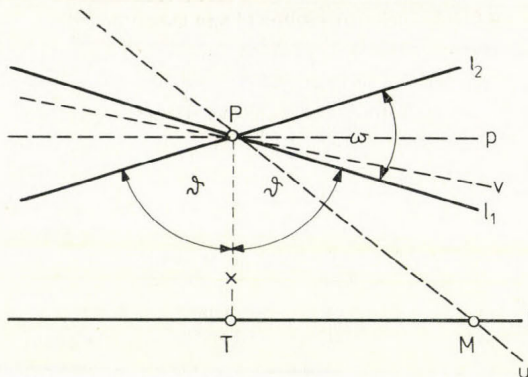
Az Appendix latin nyelvű, 26 nyomtatott oldal terjedelmű értekezés, két oldal hibajegyzékkel és egy 23 ábrát tartalmazó oldallal kiegészítve. Szövegezése mesterien tömör, kristálytisztá. Olvasása feszült figyelmet követel. Rövidség kedvéért gyakran használ pontosan meghatározott értelmű szimbólumokat. Mesteri fogalmazását melegen dicsérik a későbbi korok szakemberei. Bonola az abszolút geometria szinusztételének kifejezését így minősíti: „... wunderbarer Einfachheit und Eleganz ...”. Kagan pedig — Bolyai és Lobacsevszkij művét összehasonlító tanulmányában — a következőket írta: „... Nem túlzás, ha azt állítjuk, hogy Bolyai valójában bármely állandó görbületű tér geometriájának alapjait megalkotta: vagyis kiválasztotta azt az ismeretanyagot, amely az összes állandó görbületű terekre nézve tiszta geometriai formában egyöntetűen kifejezhető.”

Bolyai korának legnagyobb matematikusa, Gauss fukar, de kénytelen dicséretéből, amit az Appendix hatására írt, csak fél mondatot idézek: „... éppen régi jó barátom fia az, ki engem olyan csodálatos módon megelőzött.

* * *

Most pedig megkísérlem az Appendix-ben közölt főbb eredmények rövid ismertetését.

Először is a párhuzamosság fogalmának a Bolyai-féle értelmezését tekintjük, amely a maradék axiómákkal összefér. (I. ábra)



Adva van egy l egyenes és kívülre egy P pont. Osztályozzuk a sík P ponton átmenő egyeneseit. Legyen T a P pontból l egyenesre bocsátott merőleges egyenes talppontja, továbbá a P ponton átmenő P egyenes legyen a PT -re merőleges.

A maradék axiómákból következik, hogy P nem metszi az l egyenest, és ha a párhuzamosság euklideszi posztulátuma is teljesül, akkor nincs is más, a P ponton átmenő egyenes, amely az l egyenest nem metszi. Ha azonban a párhuzamossági posztulátum tagadása az igaz, akkor a P ponton át több, az l -et nem metsző egyenes halad. Ezt az anti-euklideszi esetet részletesebben jellemezzük.

Van a P ponton átmenő két egyenes, az l_1 és az l_2 , amely az l -et nem metszi, de a P ponton átmenő, ϑ szögtartománybeli u egyenes metszi az l -et, és az ω szögtartománybeli semelyik v egyenes se metszi az l -et. Bolyai az l_1 és l_2 egyenest mondja az l egyenessel *párhuzamosnak*, amit az $l_1 ||| l$ és $l_2 ||| l$ jelöléssel illet.

Az x távolság és a ϑ szög összefüggését kifejező tétel:

$$\cotg \frac{\vartheta}{2} = e^{\frac{x}{k}},$$

ahol e az Euler-szám ($e=2,718 \dots$), k pedig egy geometriát jellemző tetszőleges pozitív valós szám. Vagyis többféle tér lehetséges, annyiféle, ahányféle pozitív valós k szám van, de egy lehetséges térben a k egy rögzített értéke teljesül. — Én ezt a tételt rövideg kedvéért $\vartheta(x)$ -tételnek fogom nevezni.

Aki Bolyai János eszmevilágának fejlődését — a ránk maradt dokumentumok alapján — megkísérli rekonstruálni, annak az a véleménye, hogy az efféle tétel felfedezése, következményeinek, értelmének teljes belátása a kutató olyan filozófiai érettségét feltételezi, amelytől a korabeli matematikusok még nagyon messze voltak. — Ismeretes, hogy a kortársak általában nehezen értékelték meg Bolyai geometriáját. Ebben a matematikára vonatkozó, konzervatív filozófiai felfogásuk bénító ereje tükröződik.

Nagyon valószínű, hogy időrendben a $\vartheta(x)$ -tételt fedezte fel először, aminek a nyomán a kutatás programja már világosan kibontakozott, s akkor írta azt a nevezetes levelet apjának, amelynek egyik lelkes sora: „... *semmiből egy új más világot teremtettem*“ (1823. november 3.).

Az $e^{\frac{x}{k}}$ hatvány értéke annál közelebb esik az 1-hez, minél kisebb az x a k -hoz képest, illetve minél nagyobb a k az x -hez képest. Ebből az észrevételből pedig két-féle geometriai tétel következik:

1. *lokálisan az euklideszi geometria érvényes a nem-euklideszi térben is.*
2. *Ha k végtelen nagy, akkor az euklideszi geometria érvényes.*

A k konstans szerepét az r sugarú kör kifejezésében, a háromszög területének a képletében tekintve annak az analógiának az észrevése kínálkozik, amely a k paraméterű nem-euklideszi sík és a k sugarú gömb felületek a geometriája közt fennáll.

Bolyai tudta, hogy a gömbi geometria a párhuzamossági posztulátumtól függetlenül is felépíthető. Ezért is úgy vélem, a szóban forgó analógia fáklyaként világította meg számára a követendő utat.

Az a sugarú kör kerületét a $\circ a$ szimbólummal jelölte és azt találta, hogy

$$\circ a = k \cdot \pi \cdot (e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}).$$

— Ha k minden határon túl növekszik, ez a képlet átmegy a $\circ a = 2\pi a$ euklideszi formába. —

A háromszög szögeinek ívmértéke legyen α, β, δ , akkor a $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ számot a háromszög *defektusának* mondjuk. A háromszög területét Δ -val, defektusát δ -val jelölve:

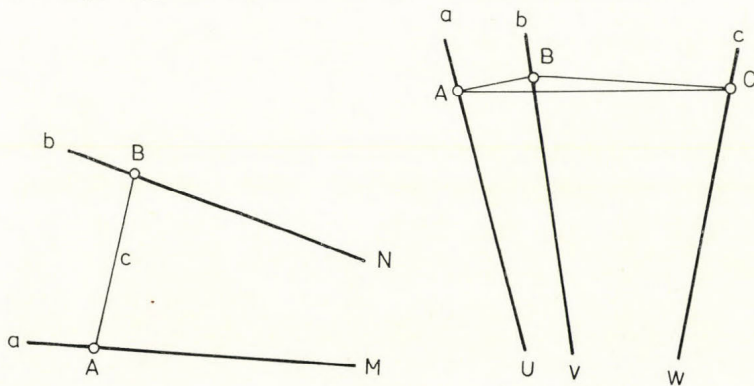
$$\Delta = k^2 \delta$$

A mondott analógia különösen a legutolsó formulánál mutatkozik. Bolyai mes-teri egyszerűséggel tudja kifejezni az olyan geometriai tételeket, amelyek az euklideszi és a nem-euklideszi geometriában egyaránt érvényesek. — Két példát említek: a szinusztételt és a Pitagorasz-tételt:

$$\circ a : \circ b = \sin \alpha : \sin \beta, \quad (\circ a)^2 + (\circ b)^2 = (\circ c)^2$$

Bolyai rövidség kedvéért még az euklideszi geometria és a nem-euklideszi geometria szavakat is egy görög, illetve egy latin nagybetűvel, Σ -val és S -sel helyettesítette.

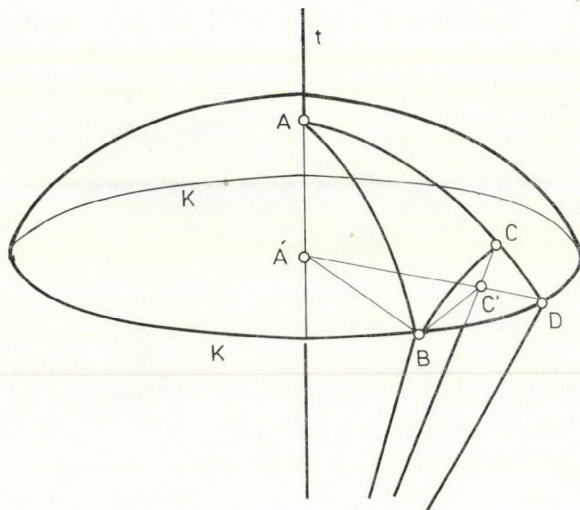
Legyen a sík a és b egyenese párhuzamos és messe egy c egyenes a két egyenest úgy, hogy az MAB szög legyen az NBA szöggel egyenlő. Bolyai ezt az A és B közt fennálló relációt, amit Bolyai a $\approx$ jellel illet, Gauss *izogonális korrespondenciának* nevezi. Ez a reláció a párhuzamossági posztulátumtól független és az is abszolút geometriai tény, hogy ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív.



Ez a relációfogalom teszi lehetővé a kör fogalmának egy olyan bővülését, hogy a kör középpontja és sugara a görbe definíciójában nem szerepel.

— Bolyai ugyanis joggal számúzte az afféle logikátlanságokat, mint „a végtelen sugarú kör”. A kortársak a szabatoságnak ezt a fokát szörszálhasogatásnak tekintették, de ma tudjuk hogy az a szigorú felfogás szükséges, tehát az a helyes.

Tekintsük a sík olyan egyeneseinek a halmazát, amely egyenesek páronként párhuzamosak, továbbá az egyenesek egyikén egy A pontot. A mondott párhuzamos egyenesek mindegyikén van az A -nak az izogonális korrespondencia szerinti társ-pontja. Az A és társ-pontjai egy L vonalat (Gauss szavaival *paraciklust*) alkotnak. Analóg fogalom a térben az F felület (Gauss szerint a *paraszféra*).



Termékeny analógia vehető észre a paraszféra felületén, illetve a gömb felületén érvényes geometria közt, ha a gömbi főkör szerepét a paraszférán a paraciklikus veszi át. Bolyai fő eredményének mondhatjuk a következő tételt:

Ha a paraszférán a paraciklust tekintjük egyenesnek, akkor a paraszférán az euklideszi geometria érvényes.

Annak amit ma *modellmódszernek* nevezünk, első előfordulása Bolyai művében található. A nem-euklideszi térben — pontosabban a hiperbolikus térben — modellt szerkesztett — a paraszférát —, amelyen az euklideszi geometria érvényes. Ennek a modellnek a létezése azt bizonyítja, hogy ha S ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan a Σ is. Bolyai azonban Σ ellentmondástalanságát feltételezte, nem is akarta bizonyítani. Ő a modellmódszert arra használta, hogy az S -ben érvényes tételek a Σ -ban érvényes tételekből levezesse. — Ez is figyelemre méltó, eredeti módszertani ötlet. —

Az Appendix 33 §-ában kiemelten közli a Σ -és az S -rendszer közt fennálló logikai viszonyt, leszögezvén, hogy a Σ -rendszer, vagy pedig valamelyik [a k valamely értékére utal] S -rendszer teljesül-e a valóságban, az *a priori* el nem dönthető. Most már csak az alapjaiban adott S -rendszer részletes kimunkálása van hátra, ami sokkal szí-

nesebb és gazdagabb, mint a Σ . Mondhatnám, hogy erről akarja meggyőzni az olvasót, midőn megmutatja olyan körnek a szerkesztését, amellyel egyenlő területű négyszög szerkeszthető.

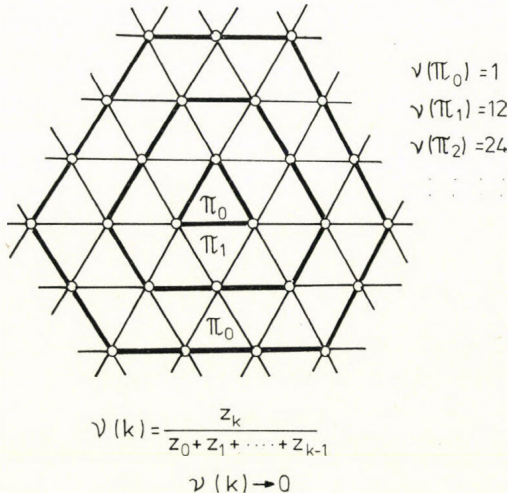
Bolyai János korszakalkotó művét a maga korában elért tudomány és gondolkodásmód tükrében kell tekintenünk, ha alkotóerejét és intellektuális bátorságát igazságosan akarjuk méltatni. Ha valaki 1832-ben a kanti téziseknek ellentmondó állításokat le mert írni, azt a kortársak többsége tudománytalan zagyvaságnak minősítette. Ezzel a közfelfogással még a nagy Gauss is óvakodott szembeszállni. Bolyait az efféle fékező erők nem befolyásolták, műve címszáva is kifejezi, hogy Kantnak nem ad igazat. Sőt későbbi feljegyzéseiben Gauss óvatos magatartását is élesen, de igazságosan bírálja.

* * *

Befejezésül egyetemi előadásaimból kiragadott témával igyekszem azt érzékeltetni, hogy az S rendszer geometriája mennyivel gazdagabb, színesebb, mint a Σ rendszeré.

Egybevágó szabályos háromszögekkel úgy lehet egyrétűen és hézagtalanul lefedni az euklideszi síkot, hogy a lefedés bármely két szomszédos háromszögének, vagy egy közös oldala, vagy egy közös csúcsa van. Ezt a lefedő alakzatot *szabályos háromszögrácsnak* mondjuk. Az alakzat bármely π_0 háromszögből mint magból kiindulva a szomszédosság szerint $\pi_1, \pi_2, \dots$ övekre bontjuk a rácsot. A k indexű övet alkotó háromszögek számát z_k -val jelöljük. Tekintsük most a

$$v(k) = \frac{z_k}{z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}}$$



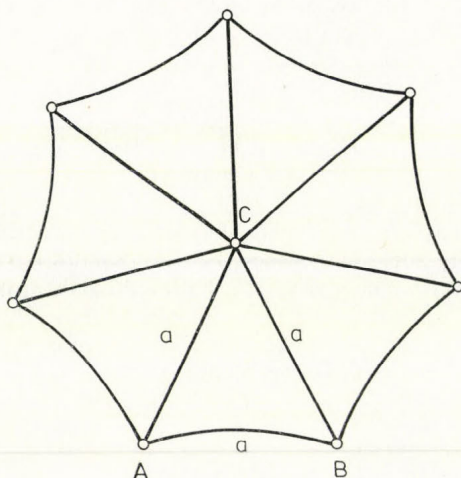
számot. Ha k minden határon túl növekszik, akkor v a 0-hoz tart.

Az analóg probléma az S rendszerben más-más eredményre vezet, attól függően, hogy mekkora a szabályos háromszög szöge. A szabályos háromszög szögének ívmértéke bármely 0-nál nagyobb, de $\pi/3$ -nál kisebb szám lehet. Ha például a háromszögrács elemét képző szabályos háromszög szögének ívmértéke $2\pi/7$, akkor minden

rácspontban hét háromszög találkozik, és $z_0=1$, $z_1=15$, $z_2=45$, Ebben az esetben

$$v(k) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ha a π_0 szöge $2\pi/S$ ($S=7, 8, \dots$); S értéke szerint a v határértéke más-más *kvadrátikus irracionális szám*.



$$\gamma(k) \rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Mondanivalóim végére értem, s összefoglalásként a következőket emelem ki. Bolyai János művének igazságos értékelése megköveteli, hogy a korabeli matematikai gondolkodásmódhoz, a matematikára vonatkozó filozófiai nézetekhez, az addig elért tudományos ismeretanyaghoz viszonyítva mérlegeljük azt, amit ő alkotott.

A matematikára vonatkozó filozófiai nézetei gyümölcsözően hatottak problémátételére, elfogulatlan eszmevilágának kialakulására. Úgy vélem, hogy ennek köszönhető a két évezrede megoldatlan probléma tisztázásához vezető helyes út megtalálása.

A nagy felfedezések értékelése azt is megköveteli, hogy a tudomány továbbfejlődésében megmutatkozó hatását feltárjuk és elemezzük. Ez a téma azonban Rapcsák András előadásának tárgya, én a magam mondanivalóit befejeztem.

ПРЕЦЕДЕНТЫ АППЕНДИКСА И ЕГО НАУЧНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ
ФЕРЕНЦ КАРТЕСИ

THE PRECEDENTS OF THE APPENDIX AND ITS SCIENTIFIC RESULTS
F. KÁRTESZI