

A KÉT BOLYAI ÉLETÚTJA ÉS A TENTAMEN TUDOMÁNYOS JELENTŐSÉGE

SZÉNÁSSY BARNA

E hosszú című előadás időtartamát iparkodom rövidre fogni. Munkámat megnehezíti az, hogy a két Bolyai jelenleg is egyesek szép eredményeket fölmutató kutatási, mások bántóan regényesítő vadászterülete. Az utóbbiak egy részének a hatására a köztudatban elmélyültek azok a kitalált ferdítések, amelyek méltatlanok két tudósunk emlékéhez. Az alábbiakban a legszükségesebb életrajzi adatok közlésén kívül kissé nagyobb teret fordítok a koholmányok cáfolatára.

Bolyai Farkas 1775. február 9-én a Nagyszeben közelében levő Bolyán született, az ott élő Bolyai Gáspár szolgabíró idősebbik fiaként. Az apáról annyit tudunk, hogy családszerető, művelt, hozzáértéssel és becsületesen gazdálkodó megyei tisztviselő volt, kinek bolyai birtokát csak kevéssel gyarapította korán elhunyt felesége domáldi öröksége.

Farkas tehát anyagi javakat alig örökölt szüleitől, de sokirányú szellemi adottságot annál többet. Annyi bizonyos, hogy hat és fél éves korát meghazudtoló tudás birtokában került a nagyenyedi kollégiumba, Erdély egyik legjelentősebb szellemi centrumába. Az adatok egybehangzóan csodagyermeknek minősítik, ennek a vélekedésnek hiteles forrásai: volt tanárainak, kortársainak, későbbi tanítványainak az írásai, valamint az apa műveltségéről, tudományos értékeiről kellő objektivitással vélekedő Bolyai János kézírásos hagyatéka. A visszaemlékezések szerint már gyermek korában jól bírta a latin nyelvet, oly mértékben, hogy tetszőlegesen fölvetett témáról verseket tudott rögtönözni, bizonyítva ezáltal költői és írói hajlamát is. Jól ismerte a román nyelvet, fokozatosan elsajátította a németet, a franciát, az angolt, az olaszt és a hébert, ez utóbbit annyira, hogy az Ótestamentumot is fordítgatta. Rajzkészségét ma is beszédesen bizonyítja az a két tempera festmény, amely a marosvásárhelyi Bolyai Múzeumban látható, írói adottságáról pedig nyomtatásban is megjelent hat színműve tanúskodik.

Életének jelentős állomása volt, midőn 1788-ban id. Kemény Simon báró hasonló nevű fia (1779—1826) mellé került házitanítónak, akkori szóhasználatnál élve mentornak. Divatos volt ez jobb módú főuraink körében, a mentor szerepe talán megalázónak minősült, de anyagiakban általában előnyökkel járt. Farkas esetében inkább az előnyök domináltak, egyrészt ugyanis ezáltal tudta biztosítani a továbbtanulás anyagi előfeltételeit, másrészt tanítványában egy mindig mellette álló, segítőkész barátot nyert.

1790-től mindketten a kolozsvári református kollégiumban folytatták tanulmányaikat, majd 1795 végén külföldi útra indultak, hogy ott bővítsék ismereteiket. Egy félévet Jénában töltöttek, az ottani egyetem ezekben az években élte — főleg humán szempontból — első fénykorát. „Szerencsájük volt Schillert személyesen is tisztelni” — írja Brassai Sámuel. Matematikai szempontból azért említésre méltó

a jénai tartózkodás, mert ekkor kezdett megérlelődni Farkasban egy nagyobb matematikai munka kidolgozásának a terve.

A jénai tartózkodásnál azonban kétségtelenül jelentősebb volt a Göttingenben töltött három év. Sok kedves ismeretségen kívül itt szövődtek azok a baráti szálak, amelyek az akkor ugyancsak Göttingenben búvárkodó Gausshoz kötötték. Az ide tartozó adatok összegezése alapján azt mondhatjuk, hogy személyes beszélgetéseik matematikai szempontból mindkettőjük számára haszonnal jártak, az elválásuk után megindult levélbeli kapcsolatuk viszont már többet jelentett Bolyai Farkas, mint Gauss életében. Gondolatcserejük témáját főleg a matematika lényegének elemzése, továbbá a tér filozófiai kérdése szolgáltatta, valamint az euklideszi párhuzamossági axióma bebizonyításának a lehetősége. Ám egy új geometria megalkotásának a gondolata ekkor föl sem merült bennük. Eléggé pontosan megállapítható, hogy a párhuzamossági axióma igen sok sikertelen bizonyítási kísérletének hatására Gaussban 1816-tól kezdett megérlelődni egy valamiféle nem-euklideszi geometria lehetőségének a gondolata, de ezekben az években csaknem egy negyedszázadon át nemhogy személyes, de még levélbeli kapcsolatban sem állott Farkassal. Merőben téves tehát az a sok külföldi matematikus által vallott nézet, hogy egy új geometria kidolgozásának az ötletét Bolyai Farkas Gausstól hallotta és aztán ő továbbította a fiának, Jánosnak.

Bolyai Farkas 1799 szeptemberében tért vissza göttingeni tartózkodása után hazájába, fájdalommal búcsúzva az ottani három év nehéz, de szép élményeitől. Ezen nem is csodálkozhatunk: ez volt életének első, de egyben utolsó olyan szakasza, amikor tudományos elgondolásait hozzáértő barátaival meg tudta beszélni. Negyven év múltán így harmadolta föl hosszú életét:

„Mind eddig még a szebb napot ígérő reggel volt, — mely tűzzel és jéggel terhes nehéz időkkal váltott égető napok után — végigtartó borúval esett a mostani havazásig.”

Ugyanis hazatérte után a „tűz” szó szerint és képletesen is beleszólt életébe: szó szerint azért, hogy leégett a bolyai kúria, az allegorikus „tűz” pedig a 25 éves férfiú szerelmi föllángolását jelenti. Vonzalmának alanya Árkosi Benkő Zsuzsanna (1780—1821), egy kolozsvári kirurgus leánya volt, akit 1801. szeptember 28-án nőül vett. Ebből a házasságból született 1802. december 15-én Kolozsvárott Bolyai János. A családi eseményről csakhamar a következőként értesítette barátját, Gauszt:

„.... egészséges, nagyon szép gyermek, finom vonásokkal, fekete hajjal és szemöldökkel, égő, sötétkék szemekkel, amelyek néha úgy ragyognak, mint két drágakő. Ennyiben az anyja, különben hozzám is sokban hasonlít.”

Sajnos a csecsemőkori képnél sokkal többet nem is tudunk Bolyai János külsejéről. Az egyetlen róla készült festményt — „a bécsi képet” — tudjuk, hogy maga Bolyai János kaszabolta szét a 30-as években. Az a kép, amely sok helyen — még postai bélyegeken is — látható róla, nem bizonyult hitelesnek. A jelleméről azonban bőven van adatunk. Hullámzó lelkiállapot, kirobbanó jókedv és borúlátó zárkózottság, meleg szeretet és rideg magatartás, makacsság és engedetlenség, amelyet szinte átmenet nélkül váltott föl a szülők és a barátok iránti gyöngédség. Egy dologban azonban Bolyai János egész életén át következetes és tárgyilagos volt: az igazságértében és a bátor szókimondásban, még akkor is, ha ez reá nézve hátránnyal járt.

1804. január 22-én Bolyai Farkas az erdélyi református egyházkerület főkonzisztóriumának meghívó levele alapján a marosvásárhelyi kollégium matematika—fizika—kémia katedrájának a tanára lett. Ettől kezdve ebben a városban és csaknem haláláig az említett iskolában peregetek életének inkább terhes, mint derűs napjai.

A következőkben a nagy tekintélyű professzornak és a már gyermekkorában éles logikai készséget eláruló fiának életútját csupán a leglényegesebb külső eseményekre

szorítkozva követem. Az egyik ilyen esemény az volt, hogy 1816-ban — közeledvén János érettségi vizsgálata — mindkettőjükben fölvetődött a nagy kérdés, vajon mi legyen a folytatás? A gyermekien naiv apa azt szerette volna, ha János Gauss házába megy és az ő irányítása mellett képezi tovább magát. Dédelgetett álma volt, hogy jeles matematikus váljék a fiából. Sajnos, a Gauss-hoz ebben az ügyben írt levelére nem érkezett válasz, tehát a tervet módosítaniuk kellett. Végül is a választás a bécsi hadmérnöki akadémiára esett, de János ottani tanulmányait anyagi okok miatt érettségi után csak egy év múlva, 1818-ban kezdhette meg. Megtoldva a szabvány kiképzési időt egy magasabb műszaki csapatokhoz történő beosztásra jogosító továbbképzési évvel, 1823 szeptemberében itt szerezte meg a hadmérnöki képesítést.

Idehaza pedig az anyagi gondokkal is küzdő apa nehéz életét még súlyosbította feleségének évekig tartó betegsége. 1821. szeptember 18-án váltotta meg a szerencsétlen asszonyt fájdalomtól a halál. Utolsó kívánságának megfelelően a domáldi dombtetőn helyezték örök nyugalomra. A legutóbbi évekig jeltelen sírhelyét két év óta Weszely Tibor fáradságot nem ismerő közbenjárása eredményeként hatalmas kopjafa jelzi.

Bolyai Jánost alhadnagyi minőségben 1823. szeptember 30-án a temesvári erődítési igazgatóságához vezényelték, innen írta november 3-án azt a sokat idézett levelet, amely szerint „semiből egy újj, más világot” teremtett.

Bolyai Farkas az özvegységet hamar felváltotta egy újabb „keresztel”: 1824. december 31-én ismét megnősült. Rövid életű (1797—1833) második felesége, Somorjai Nagy Teréz, egy marosvásárhelyi vaskereskedő leánya volt. Harmadszorra már nem szánta rá magát a házasságra, pedig könnyen hevülő természete inkább ezt tette volna logikussá. „Szent István nap után nem kell filemilét várni” — írja egy helyen a 60. éve felé közeledő Farkas, célozva a késői nősülés nagyon is kétséges boldogságára. Ezekre az évekre lehet találó az a néhány sor, amelyet Bedőházinál olvasunk, aki bizonyára idősebb ismerősök, kartársak emlékei alapján írta a következőket:

„Ha képet akar képzeletünk festeni róla, mindig az a közép-termetű, hosszúka, beretvált nyájás arcú, kissé meggörnyedt öreg ember alakja áll előttünk kétfelé választott, vállaira omló hosszú fehér hajával, ajkai körül a mélabú, a szelíd bánat sajátságos vonásával, villogó mélytűzű szemeivel. Amint megjelent katedráján fekete, kissé kopottas ruhájában, hosszúszerű csizmákban, vállain kékes színű hosszú köpenyben, kezében széles karimájú kalapjával; mintha hallanók köhécselését, rekedtes hangját, amely az előadás tüzeiben átmelegedve visszanyeri csengését; vagy amint otthon gondolataiba vagy számjaiba merülve asztala előtt ül fehér flanel ujjasában, szemén a zöld ernyővel; mintha látnók tollának izgatott futását a papíron, mialatt betűi, keze nem tudván gondolataival versenyt haladni, alig olvasható sorokká alakulnak.”

1826 áprilisában Bolyai Jánost Aradra helyezték, itt érte el a főhadnagyi rendfokozatot. Tudománytörténeti szempontból nagy jelentőségű esemény, hogy ebben az évben átadott ugyancsak Aradon szolgáló volt bécsi matematikatanárának, Wolter von Eckwehr századosnak egy kézírásos értekezést, amelyben addigi nemeuklidészi geometriai vizsgálatainak az eredményeit foglalta össze. Valószínűleg az volt a célja, hogy a kapitány a szolgálati út betartásával elbírálás végett egy arra illetékes személyhez juttassa. Sajnos, ennek az értekezésnek nyoma veszett, lehet, hogy megsemmisült, de az sincs kizárva, hogy valamelyik katonai, esetleg Habsburg¹ levéltár mélyén lappang.

Egyébként konkrét adatokban Bolyai János változatos életének az Aradon eltöltött öt éve a legszegényebb, talán éppen ezért a leggazdagabb a műkedvelők és a regényírók által kitalált történetekben. Annyi bizonyos, hogy különféle betegségeinek

¹ Johann Habsburg (1782—1859, I. Ferenc császár és király öccse) volt ekkor a monarchia műszaki csapatainak főfelügyelője. Többször adta tanújelét Bolyai János iránti jóindulatának.

első tünetei itt kezdtek jelentkezni. Gyakran volt maláriás, de az utókor szenzációéhsége nem kímélte nemi betegségek fölhánytorgatásától sem. A rosszindulatú állítások megcáfolására önéletrajzának csupán egy mondatát idézem: „.... minden francról (=szifilisz, vérbaj) tisztán maradtam”. Ez a mondat, főleg pedig a jeles dermatológus, Berde Károly néhány éve megjelent alapos tanulmánya igazít el e téren. Magyarazatként meg kell említenünk, hogy főleg a negyvenes-ötvenes években Jánost sokat kínozt a valamiféle bőrbetegség. A gazdagon visszamaradt orvosi leírásoknak, az előírt gyógyszereknek, valamint a kezelési utasításoknak a bőrgyógyászat mai fejlettsége szerinti mérlegelése alapján Berde Károly azt állapította meg, hogy betegsége vagy — a ma is nehezen befolyásolható — „pikkelysömör” (psoriasis), vagy seborrhoeás ekcéma volt.

A regényesítő irodalom aradi szolgálatának idejére helyezi Bolyai János párbajait is. Kiváló vívókészségről tudunk, de a „félelmetes”, „ijesztő” kardpárbajok koholmányok. Egyébként erről a kérdésről is pontosan tájékoztat önéletrajza. Szavai szerint „.... több ízben volt kedvetlen összejövésem s kardra hivatattam” ... „bajnok s velem vívott társaim azonban mind az actus előtt, mind azután a legjobb indulatot mutatták mindig hozzám”. Ennek a szinte szégyenkező önvallomásnak megfelelően kell helyreigazítanunk az irodalom fantáziaszülte állításait.

1831 elején Lembergbe vezényelték, s odautaztában fölkereste Marosvásárhelyen édesapját. Ez a találkozó döntő hatású volt az Appendix megjelenésére, erről később még beszélek.

Mindenesetre az Appendixnek Gauss által történt kétes értékű dicsérete, valamint annak a szívós harcnak a sikertelensége, hogy munkáját mások is elbírálják, lelkiileg, testileg összetörte Bolyai Jánost. Katonai szolgálatát egyre kedvetlenebbül látta el, elzárkózott környezetétől, barátaitól. 1832 áprilisában egy újabb rendelkezés Olmützbe szólította, itt még elérte a másodosztályú kapitányi rendfokozatot, de aztán 1833. június 16-i hatállyal saját kérésére nyugállományba helyezték.

Hazatérve egy éven át édesapja házában élt Marosvásárhelyen. Azonban a két ellentétes természetű ember, a köztisztelőben álló, szinte gyerekes lelkületű Farkas, és a korán megöregedett, zárkózott és mindenben csalódott János között napirenden voltak a torzsalkodások. Végül is János apai hozzájárulással Domáldra költözött, és átvette az ottani szerény birtok vezetését. Ott élt kisebb megszakításokkal 1846-ig, 1834 augusztusától közös háztartásban egy Kibédi Orbán Rozália nevű leánnyal. Együttlétüket a tisztekre az osztrák—magyar monarchia rendelkezései értelmében kötelező kaució hiányában jó ideig nem is tudták törvényesíteni. Élettársi kapcsolatukból két gyermek született: Dénes (1837—1913) és Amália (1840—1893). Az előbbi törvényszéki irodaigazgatóként halt meg, több gyermeket és unokát hagyva hátra, Amália férjhez ment, de gyermektelenül halálozott el.

Bolyai Farkas úgy látta, hogy János nem jó gazda, nem fordít kellő gondot a domáldi birtokra. Ezért 1846-ban fölmondta Jánossal kötött egyezségét és a fiúnak új lakhelyről kellett gondoskodnia. Szerény kis házat építtetett Marosvásárhelyen, s családjával odaköltözött. Így az apa közelében, de vele nem mindig teljes egyetértésben peregték élete hátralevő évei.

A szabadságharc hatással volt mindkettőjükre. Az apa nagyon aggodalmaskodva szemlélte az eseményeket és szinte látnoki szemmel jövendőlte meg a bukást. János ekkori élete nagy enciklopédikus műve, az Údvtan fogalmazgatásában merült ki, egyre elhatalmasodó betegsége megakadályozta abban, hogy katonai fölkészültségét nemzete szolgálatába állítsa. Az 1848-as év azért is jelentős a két Bolyai életében, mert ekkor sikerült megszerezniük Lobacsevszkij Berlinben, 1840-ben kiadott „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien” c. könyvecskéjét. Mindketten

alaposan tanulmányozták a művet, sajnos, János lényegbe látó és igen elismerő megjegyzései csak 1900-ban jelentek meg, Paul Stäckel és Kürschák József által 30 oldalas dolgozattá kerekítve.

A szabadságharc alatt Marosvásárhely és környéke rövid időre elszakadt az osztrák csapatok ellenőrzésétől, így lehetőség nyílt arra, hogy ne vegyék figyelembe a monarchia tisztjeire vonatkozó rendelkezéseket. 1849. május 18-án akadt is egy olyan marosvásárhelyi református pap, aki bejegyezte a matrikulába Bolyai János és Orbán Rozália házasságát. Három év múltán azonban a felettes hatóságok ezt érvénytelennek nyilvánították, ekkor, de nem emiatt Bolyai János szakított Orbán Rozáliával.

Bolyai Farkas 1850-ben saját kérésére nyugállományba vonult és a matematikusokat jellemző precizitással megkezdte fölkészülését a halálra. Rendegette iratait, selejtezte, amit feleslegesnek vélt, megírta és kinyomatta stílusa szerint dagályos, de mély gondolatokat is tartalmazó halotti jelentését. A két magányos férfi között is elült minden vihar, kapcsolatukat a kölcsönös szeretet és az egymásért való aggodás váltotta föl. Így amikor a „nyolc X alatt sok x-et írt” tanár szemeit 1856. november 20-án a halál lezárta, a fiú kétszeresen is árva maradt. Elvesztette édesapját és az egyetlen olyan személyt, aki őt tudományosan megértette és értékelte.

1856. november 23-án az elhunyt professzort a kis város csaknem minden polgára elkísérte utolsó útjára. Három év múltán, 1860. január 27-én János is követte, de az ő gyászmenetét a hivatalból kirendelt két tiszten kívül — tudomásunk szerint — mindössze három polgári személy alkotta. 1884-ben Bolyai Farkas sírjára közadakozásból a marosvásárhelyi kollégium előljárósága, rá tíz évre Bolyai János távolabbi behorpadt nyughelyére a Matematikai és Fizikai Társulat állíttatott sírkövet.

1911. június 11-én pedig a hivatalos előírások betartásával a külön sírban nyugvó apát és fiút kihantolták és hamvaikat egymás mellé helyezték. Azóta az életben egymással oly sokat békétlenkedő két tudós közös sírhant alatt alussza örök álmát a marosvásárhelyi református temetőben.

* * *

A most elhangzó előadások Bolyai Farkas Tentamen c. könyve, valamint Bolyai János Appendix néven emlegetett értekezése megjelenésének másfél évszázados fordulóját hivatottak fölidézni. Előljáróként rögtön egy kis pontosítás a dátumokban: a Tentamen I. kötete és benne függelékként az Appendix valóban 150 éve került ki a marosvásárhelyi nyomdából, de az Appendix különlenyomatai már egy évvel hamarabb, 1831. június 20.-a előtt elkészültek, a Tentamen II. kötete pedig 1833-ban hagyta el a sajtót.

Az Appendix jelentőségét arra hivatottabb kartársaim fogják ismertetni. Az én feladatom a Tentamen és általában is Bolyai Farkas matematikai tevékenységének vázolása.

Bolyai Farkas vallomása szerint a matematika több területét felölelő, de különösebben az alapok néhány — akkor még nem eléggé tisztázott — problémáját precízebben tárgyaló könyvének terve már jénai tartózkodása idején megfogalmazódott benne. Miként írja, a „Saale partján sétálgatva” kezdett tépelődni a matematika alapjain, ott „keletkeztek az első gyökerei annak, amit aztán kifinomítani és bővíteni” iparkodott. Három évtized buktatókkal, kitérőkkel és csalódásokkal teli időnek kellett azonban még elteltie, amíg a latin nyelvű kézirat nyomdakésszé formálódott, és kiadására a főhatóság „imprimatur”-a engedélye 1829. október 12-én megérkezett. De ezzel még csak elkezdődtek a megjelenése elé tornyosuló nehézségek: a kiadás

költségeinek legalább egy részét előfizetők gyűjtése révén kellett a szerény jövedelmű tanárnak biztosítania, továbbá matematikai szöveg előállítására föl kellett készítenie a primitív nyomdát.

A Tentamen I. kötetéhez csatolt Toldalék szerint Bolyai Farkas mintegy 130 példányra talált megrendelőt, a II. kötet esetében ez a szám 28-cal gyarapodott. Név szerint ismerjük az előfizetőket, matematikus, vagy e tudomány iránt komolyabban érdeklődő aligha szerepel közöttük. Az Appendix kinyomását anyagilag Bolyai János tette lehetővé mintegy három havi fizetésével, 104 Rhénus forinttal.

Ismeretes, hogy mindkét Bolyai igen sok, kifejező, többségében hasznos, de addig ismeretlen matematikai szimbólumot alkalmazott. „A jegyekkel, figurákkal s több effélékkel... sok késleltető baj volt”, panaszkodik egy helyen Bolyai Farkas. Kísérlete, hogy Pesten gravírozassa a jeleket, hiábavalónak bizonyult, végül is a kollégium diákjai segítették ki. Farkas könyvének a végén külön is köszönetet mond Ilentzfalvi Szász Pálnak az e téren nyújtott segítségért, az „új mathesisi jegyekből ami jó, neki köszönöm”.

Legyőzve az akadályokat végül is 1832-ben megjelent a Tentamen I. köteté LII+502 lap terjedelemben, valamint hozzácsatoltan az Appendix és a 14 oldalas magyar nyelvű tooldalék. Megemlítendő, hogy Bolyai Farkas a könyvhöz 1844-ig folyamatosan kinyomtatott 50 lapnyi különféle helyreigazítást és kiegészítést.

A XVI+400 oldalas II. kötet 1833-ban lett kész. Ez a 380—383. oldalain Farkas azon fejtegetéseit tartalmazza, amelyek — szavai szerint — „mint betetőzés az Appendix szerzőjének tulajdonát képezik”. E négy oldalon egyrészt azt mutatja meg, hogy az abszolút geometria síktrigonometriájának képletei alakilag megegyeznek a képzetes sugarú szférikus háromszög megfelelő formuláival, másrészt egy példán (Pithagorász tételén) igazolja, hogy a paraméter végtelenbe tartása esetén az abszolút trigonometria tételeiből határértékként az euklideszi geometria megfelelő képleteit nyerjük. Bolyai János ugyanis az Appendixben a tárgyalta anyagot a legszükségesebbekre korlátozta. A Tentamen II. kötetét az a három kiegészítés zárja, amelyet már az I. kötet címlapja is jelez: De perspectiva, De gnomonica és De chronologica. Ezek a perspektivitástan, valamint az asztronómia kollégiumi anyagának lényegesebb részeit tárgyalják. Félreértések elkerülése végett hangsúlyozandó tehát, hogy a Tentamen címében szereplő „Cum appendice triplici” megjegyzés ezekre a fejezetekre vonatkozik, nem Bolyai János tanulmányára. Ebből pedig értelemszerűleg következik, hogy Farkas a Tentamen már nyomdakész kéziratába menetközben illesztette be az Appendixet, belátva, hogy fia fölfedezésének a közzétételével nem szabad tovább késlekedni.

Ha még megjegyezzük, hogy a Tentamen I. köteté 500, a II. pedig 300 példányban jelent meg, és ezeket az adatokat összevetjük az előfizetők számával, akkor teljesen megalapozottnak tűnik Bolyai Farkas Gauss-hoz írott levelének azon lehangoló mondata, miszerint „Művemtet makulatúrának, csomagolásra és hasonlókra használok”.

Külföldi kezdeményezések hatására a múlt század hetvenes éveiben fölvetődött a Tentamen második kiadásának a gondolata. A terv azonban csak sokára valósult meg, főleg anyagi nehézségek késleltették a munkát. Hosszú előkészület után 1897-ben König Gyula és Réthy Mór gondos szerkesztésében, Tótóssy Béla mintaszerű ábráival díszes formában a Franklin Társulat nyomdájából végül is kikerült a Tentamen második kiadásának első, majd 1904-ben a második köteté, ez utóbbi kiegészítve egy különálló ábrakötettel. A II. kötet szerkesztését Kürschák József és Réthy Mór végezte. A szerkesztők ezúttal főleg az anyag elrendezésében hajtottak végre változtatásokat, a leglényegesebb az, hogy Bolyai János Appendixét a II. kötet vé-

gére helyezték. Tudomásom szerint a Tentamen második kiadását 300 példányban nyomták, de — úgy látszik — ez a szám még a századforduló táján is soknak bizonyult: a második kiadás ugyanis ma sem könyvészeti ritkaság, példányainak jó része felvágatlanul pihen könyvtáraink polcain, vagy porosodik az antikváriumok raktáraiban.

* * *

Fölvetődik a kérdés, hogy voltaképpen milyen természetű munka a Tentamen? Eleinte Bolyai Farkas bizonyára tankönyvnek szánta, ezt a hosszú cím néhány szavas megjegyzése is elárulja. Menetközben azonban a tudományos világtól izolálva élő marosvásárhelyi tanár módosította tervét, belátva, hogy önálló eredményeinek közzétételére is csak e könyvben nyílik lehetősége. A Tentamen tehát sajátos ötvözet a magas színvonalú, csaknem teljesíthetetlen követelményeket támasztó tankönyvnek és a szerző külön értekezésekbe jobban beillő kutatási eredményeit tárgyaló enciklopédiának.

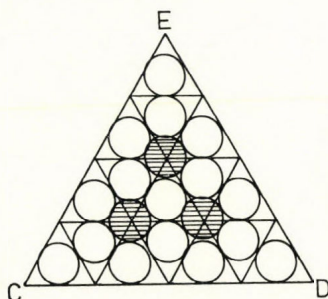
* * *

Ha mint tankönyvet akarnám tömören jellemezni a Tentament, akkor — megítélésem szerint — legtalálóbbról kifejezés rá az, amit Felix Klein óta úgy szoktunk mondani, hogy „elemi matematika magasabb szempontból”. Bolyai Farkas mindennek a mélyébe iparkodott hatolni, elemezni a végső gyökereket, rávilágítani azokra a hiányosságokra, amelyek az ő korában a tankönyveket gyakorta jellemezték. Ez a magyarázata annak, hogy a Tentamenben számos olyan megjegyzésre bukkanunk, amelyek ma főleg a „matematika alapjai” tárgykörbe illenek, és amelyek a halmazelméletre, az axiómatikus módszerekkel szemben támasztott követelményekre, a matematikai bizonyítási módokra, a valós számok precíz bevezetésére és ezekhez hasonló anyagrészekre vonatkoznak. Sajnos, ezeknek a jelentős eszmetöréseknek a részletezésére nincs időm, egy feladat során éppen csak érzékeltetni akarom, hogy Bolyai Farkas még elemi geometriai problémákban is föl tudott vetni újszerű kérdéseket.

A példa a következő: legyen adott a CDE szabályos háromszög. Osszuk fel ennek minden oldalát n egyenlő részre, és az osztópontokat összekötve húzzuk meg az oldalakkal párhuzamos egyeneseket. Ilyen módon a háromszöget n^2 számú kongruens kisebb háromszögre daraboljuk. Írjunk a kisebb háromszögekbe belülről érintő köröket. E körök között hézagok maradnak (középpontjaikat a CDE háromszög oldalaival párhuzamos egyenesek metszéspontjai adják), e hézagokba ismét rajzolhatunk, mégpedig az előbbiekkal kongruens és azokat kívülről érintő köröket. Ezzel az eljárással az eredeti háromszögbe

$$n^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

számú kongruens kört írunk (l. az ábrát).



Bolyai Farkas mármost azt a kérdést teszi fel, hogy mekkora a „vacuitas”, ennek nevezve a beírt körök által le nem fedett részt.

A második és matematikai szempontból még érdekesebb problémája, hogy mekkora a vakuitász, ha $n \rightarrow \infty$.

Bolyai Farkas példájából kiszámíthatjuk, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén a háromszög 90,689... százaléka fedhető le kongruens körökkel.

A Bolyai-féle feladattal kapcsolatban emlékeztetek arra, hogy a diszkrét-geometria kiindulópontjaként A. Thue egy 1892-ben megjelent értekezését szokták tekinteni. Ebben a tanulmányban Thue a következő kérdésre keresett választ: egymásba nem nyúló, egyenlő körlapokkal a sík hanyad része tölthető ki; vagy másként: a sík egybevágó körökkel való kitöltési sűrűségének mi a felső határa? A válasz az, hogy bármely kitöltés sűrűsége $\leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9069\dots$, és az egyenlőséget olyan körelhelyezéssel

el is érhetjük, amelynél minden kör 6 másik kört érint kívülről. A kérdésre adandó válasz nehézsége nyilván ennek a tételnek az igazolásában rejlik — tudomásom szerint Thue bizonyítása sem volt kifogástalan. Bolyai Farkas példájában már a szerkesztés módja biztosítja az optimális kitöltést. Annak a diszkrét-geometriában használatos megszorításnak, hogy a lefedés az „egész síkra” terjesztendő ki, Bolyai példája esetében az $n \rightarrow \infty$ határátmenet felel meg. Innen adódik a Bolyai példa és a Thue eredményében mutatkozó megegyezés.

A Tentamenben szereplő e feladat egyetlen lépése sem haladja meg a gimnáziumainkban szokásos ismeretanyagot, éppen ezért érdemes lenne tankönyveink alkalmas helyére is beilleszteni és ezáltal néhány szóval tanulóink előtt érzékeltetni a diszkrét-geometria kiinduló problémáját².

* * *

Tudományos szempontból igen figyelemreméltó utóélete volt egy Bolyai Farkas által talált és a Tentamenben szereplő gyökközelítő eljárásnak. Módszere (a legegyszerűbb esetre szorítkozva) az

$$x^m = a + x$$

trinom egyenlet megoldására vonatkozik. Kidolgozását az akkor rohamosan fejlődő pénzügyi élet is szükségessé tette, ugyanis a járadékszámítás ún. kamatlábproblémája trinom egyenlethez vezet.

Bolyai Farkas úgy oldja meg az egyenletet, hogy valamilyen x_0 kezdőértéket választva, azt behelyettesíti az egyenlet jobb oldalán levő x helyébe, majd az így nyert egyenlet bal oldalát x -re feloldva jutunk x_1 -hez, s. í. t. Ismételve ezt az eljárást, nyerjük az $x_1, x_2, x_3, \dots$ végtelen sorozatot. Ha $x_0 = 0$, akkor a mondottak értelmében

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[m]{a} \\ x_2 &= \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}} \\ x_3 &= \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

² A példát Lévárdi László—Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok c. (Tankönyvkiadó, 1982.) most megjelent könyve már tárgyalja (225—226.)

Bolyai Farkas egy speciális esetben megvizsgálja e sorozat konvergenciakérdését is. Pontosabban szólva azt igazolja, hogy ha $a > 0$ és a gyökvonásnak mindig a pozitív valós értékét vesszük, akkor az x_n sorozat szigorúan monoton növekvő, felülről korlátos, és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ az egyenlet egyik gyöke.

Bolyai Farkas önálló matematikai eredményei közül ez az algoritmus vált legelőbb ismertté, mégpedig Baltzer először 1860-ban megjelent, majd ezután sokszor kiadott népszerű tankönyve révén. A Tentamen második kiadásának előkészítése során Farkas Gyula figyelt föl az eljárásra és általában is az iterációs módszerek konvergenciakérdéseire, eredményeiből német és magyar nyelven több értekezést publikált. Ma már mintegy félszáz olyan tanulmányt ismerünk, amelyek szorosabban kapcsolódnak a Bolyai-féle gyökközelítő módszerhez, mindazáltal az iterációnak minden gyökkombinációt figyelembe vevő, sokfelé elágazó kérdéskörének lezárásáról nem tudok. Érdekesség kedvéért megemlítem, hogy Rényi Alfréd a valós számok előállításában látta a hasznát a Bolyai-féle algoritmusnak.

* * *

Az analízis sok területe lekötötte Bolyai Farkas figyelmét, fejtegetése a határérték Bolzano (1817) és Cauchy (1821) által definiált fogalmán alapszik. Különösen érdekesek a Tentamenben és az ehhez csatolt kiegészítésekben a végtelen sorok konvergenciájára adott kritériumai. Ismeretes, hogy Cauchy és Abel a múlt század húszas éveiben csak hosszú tépelődés után fogadta el azt az álláspontot, hogy a részletösszegek sorozatának konvergenciájával értelmezzék a végtelen sorok konvergenciáját, és a részletösszeg-sorozat határértékét tekintsék a végtelen sor összegének. Sokan kerestek ezekben az években a végtelen sorokra konvergenciakritériumokat, azonban ezek szükséges, valamint elégséges voltának a megítélésében gyakoriak voltak a tévedések.

Bolyai Farkas idetartozó vizsgálatai közül egy kritériumot említék.

Jelölje az $\frac{n-m(n)}{n}$ alakú tört azt a tényezőt, amellyel a *pozitív* tagú végtelen sor $(n-1)$ -edik tagját szoroznunk kell, hogy szorzatként az n -ediket kapjuk. Vagyis

$$u_{n-1} \frac{n-m(n)}{n} = u_n.$$

Ebből

$$m(n) = n - n \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Bolyai szerint, ha elég nagy n -től kezdve $m(n) \geq k > 1$, akkor a sor konvergens, $m(n) < 1$ esetén a sor divergens, ha $m(n) > 1$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = 1$, akkor a sor viselkedéséről semmi sem mondható.

Bolyai e kritériuma a tankönyvekben (pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei c. művében is) szereplő Raabe-kritérium alakjára hozható. Raabe 1834-ben publikálta kritériumát, és Bolyai Farkas elsőbbségét azért nem állíthatjuk, mert kritériuma csak a Tentamenhez fűzött kiegészítésekben szerepel. Az viszont adatokkal támasztható alá, hogy önállóan jutott eredményéhez. Célszerű is lenne ezt a tételt a történelmi hűségnek megfelelően Raabe—Bolyai Farkas-féle kritériumnak nevezni.

* * *

Bolyai Farkas legismertebb eredménye a végszerű területegyenlőség fogalmának a definiálása, valamint erre vonatkozó három tétele. Értelmezése szerint két síkidom akkor végszerűen egyenlő területű, ha véges számú, páronként egybevágó darabokra oszthatók. Kárteszi Ferenc igen szerencsés kifejezésével élve, ha egymásba átdarabolhatók. Megjegyzendő, hogy a „végszerű területegyenlőség” kifejezés később — Réthy Mór dolgozatai révén — terjedt el, maga Bolyai Farkas magyar nyelvű könyveiben inkább a „véges darabi”, illetve a „végtelen darabi” kifejezéseket használja. Végtelen darabi tekintetben egyenlő területű pl. az r sugarú kör és az $r\sqrt{\pi}$ élhosszúságú négyzet.

A Tentamenben az alábbi 3 tétel szerepel:

1. Egyenesekkel határolt két egyenlő területű sokszög végszerűen egyenlő.
2. Két egybevágó, egymást csak részben fedő siktartomány nem közös részei végszerűen egyenlők.
3. Két egybevágó siktartományból páronként egybevágó, tetszőleges részeket elvéve, a maradékok végszerűen egyenlők.

E három közül azonban csak az első tétel bizonyítása teljes a Tentamenben, ezt pedig Bolyai Farkas konstruktív módon két egyenlő területű, de nem kongruens rombold egymásba történő tényleges földarabolásával mutatja be.

A végszerű területegyenlőség fogalma, továbbá P. Gerwien valamivel későbbi eredetű hasonló gondolatai igen hasznosnak bizonyultak a területszámítás megalapozásában. A történelmi hűségnek jól megfelel, ha az első eredményeket Bolyai—Gerwien-tételeknek nevezzük, mint ahogy az a nemzetközi irodalomban általában szerepel is. A félreértés csupán abból származik, hogy e tételeket számos külföldi szerző Bolyai Jánostól eredőnek véli.

A Tentamen második kiadásának előkészítése során Réthy Mór kezdett a végszerű területegyenlőség kérdéskörével foglalkozni, egyrészt bebizonyítva a Tentamenben szereplő, de nem igazolt tételeket, másrészt sok irányban általánosítva a problémakört. A geometria szigorú megalapozásán a századfordulóban munkálkodó matematikusok (Dehn, Kagan, Killing, Satunovszkij, Schur, Stolz, Zolt és mások) igen hasznosnak látták e fogalmat a területszámítás bevezetésében, David Hilbert pedig a Die Grundlagen der Geometrie későbbi kiadásában külön fejezetet is szánt e kérdéskörnek. A végszerű terület- és térfogategyenlőség ma is kedvelt kutatási területe számos matematikusnak, főleg gyakorlati jelentősége miatt.

* * *

Bolyai Farkas 1804-ben elhangzott tanári székfoglalójában olvassuk a következőket:

„Más határba tartoznak azon esmeretek, amelyek valamely feltettekéből (=axiómákból) az ítélet törvényei szerint tökéletesen folynak, mint a tér megadatik a geometriának (anélkül, hogy kérdenénk, van-e a reprezentáción kívül).”

Ennek a nehézkes fogalmazású, régies szavakat tartalmazó mondatnak az az értelme, hogy más és más geometriai rendszert nyerünk annak megfelelően, hogy milyen axiómákból indulunk ki. Kérdéses azonban, hogy az így fölépített geometriák a reális világ törvényszerűségeire alkalmazhatók-e?

De ezen újszerű, a kor matematikai és filozófiai nézeteit meghaladó fölismerés ellenére Bolyai Farkas sohasem tervezte egy új geometria kidolgozását. Az ő törekvése arra irányult, hogy az akkor egyedül ismert és elfogadott euklideszi geometriát helyezze szilárdabb alapokra a párhuzamossági axióma bebizonyítása vagy szemléle-

tesebbel történő helyettesítése révén. Korántsem igaz azonban az a sok helyen olvasható állítás, amely szerint nem értette meg és nem értékelte fia fölfedezését. Az Appendix matematikai tartalmát és filozófiai jelentőségét Bolyai Farkas pontosan ismerte, erre bizonyíték a Tentamen II. kötetének már előbb említett néhány oldala, továbbá a „Kurzer Grundriss...” c. németül (tehát világnyelven!) 1851-ben megjelent kis remekműve. Ebben mintegy három oldalon át vont párhuzamot Lobacsevszkij és Bolyai János geometriai rendszere között. Sőt még ennél is továbbment: helyenként kiegészítéseket, korrekciókat is fűzött a két matematikus fejtegetéseihez. Az idetartozó irodalom ismeretében megkockáztatom azt az állítást, hogy Lobacsevszkij és Bolyai János legelső alaposabb méltatója éppen Bolyai Farkas volt.

Idézetek révén még az is igazolható, hogy az apa fokozatosan megbarátkozott a fia által alkotott új geometriával, méghozzá már az 1830-as évek legelején. Állításom alátámasztására néhány idetartozó idézetet veszek. 1831 első felében a még meg sem jelent Appendixről ezt írta egyik volt tanítványának:

„Originális nagy munka; magyar tollból olyan matematikus munka nem jött; akárhol számot teszen.”

A Tentamenben és magyar nyelvű tankönyveiben ilyesféle szavakkal méltatja fia fölfedezését:

„Az Appendix szerzője csodálatos elmeállással fejtette meg a dolgot, és egy minden esetben igaz geometriát alkotott.”

Másutt:

„Az említett Appendix foliántokat (=vaskos könyveket) érő kis munka, a tiszta igazsághoz hív mértanász előtt oly szép, szükséges, eredeti és kolosszális mű, hogy annak szerzőjétől hasonlókat várni, sőt igényelni lehet”.

„... de még kevesen látják becsét, holott szöszaporítás nélkül, remek tisztán van írva.”

Az életrajzi adatok között említettem, hogy 1831 elején Bolyai Jánost Lembergbe vezényelték. Odaautaztában meglátogatta Marosvásárhelyen az apját, erre a találkozásra célozva írta később az alábbi sorokat:

„... ha történetesen akkor éppen Marosvásárhelyen, Lembergbe lévén rendelve, az atyám nem ösztönözött s mondhatni erőltetett volna a hirtelen leírásra — hihetőleg azon Appendix tartalma sem látott volna még napfényt.”

A Bolyai Farkas szerepét e vonatkozásban nagyon hátrányosan megítélő kommentár irodalomnak egy tévesen magyarázott apai levél a kiindulópontja. Bolyai Farkas ugyanis 1820. április 4-én a paralelák kérdésével akkor már foglalkozó fiához levelet írt Bécsbe. Ennek néhány kezdő sora így szól:

„A paralelákat *azon az úton* (kiemelés tőlem. Sz. B.) ne próbáld: tudom én azt az utat is mindvégig — megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne.”

Nyilvánvaló ennek a levélnek az előzménye: Bolyai János kutatásai kezdetekor az apa nyomdokain indult el, és azt a helyettesítő axiómát iparkodott bebizonyítani, hogy egy egyenes távolságvonala szintén egyenes. Az apa levélbeli közlés útján értesült fia ez irányú kísérleteiről, és az „*azon az úton*” való megjegyzés ennek az útnak a céltalanságára vonatkozott. János pedig — hihetőleg éppen az apa intő tanácsára — tovább már valóban nem kísérletezett az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyításával vagy helyettesítésével, hanem egy új, más irányban indult el. Hogy ez az állítás nem merő fikció, azt az apai válaszelevél és Bolyai János új geometriához vezető kutatásainak ugyanazon évhez kapcsolódó kezdete valószínűsíti. Az 1820-as év második

fele ugyanis fordulópont volt Bolyai János vizsgálatainak a történetében. Ezt igazolja az a négy ábra, amelyet ez idő tájt rajzolt egyik füzetébe, és amelyeken már a hiperbolikus geometria több alapvető fogalmának (a paraciklus származtatása, olyan háromszögek, amelyek egyik oldala a másik kettő aszimptotája) a képe látható.

Összegezve az eddig mondottak következményeit, leszögezhetjük, hogy Bolyai Farkasnak fontos szerepe volt az Appendix létrejöttében és fokozatosan belátta az új térelmélet jelentőségét is. Úgy gondolom, hogy ebben kell keresnünk matematikai tevékenységének a leglényegesebb eredményét. Biztosan állítható, hogyha az apa nem vezette volna be fiát a paralelák kérdéskörének ismeretébe, és ha menetközben nem látta volna el kedvező irányba ható tanácsaival, valamint, ha nem sürgette volna eredményei leírására és közzétételére, akkor a matematikai irodalom egy korszakos jelentőségű művel, a magyarság pedig talán legjelentősebb tudósával lenne ma szegényebb.

ЖИЗНЬ ДВУХ БОЙАИ И НАУЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТЕНТАМЕНА

БАРНА СЕНАШИ

THE LIFE OF THE TWO BOLYAIS, AND THE SCIENTIFIC IMPORTANCE OF TENTAMEN

B. SZÉNÁSSY