Naloga T–1

Naj bosta $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $b_0, b_1, b_2, \ldots$ neskončni zaporedji realnih števil, za kateri velja $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ in

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

za vsako celo število $k \geq 0$. Dokaži, da velja $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Naloga T–2

Določi vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$.

Naloga T–3

Vzdolž reke Tise v vrsti sedi 2024 matematikov. Vsak izmed njih se ukvarja z natanko enim področjem raziskovanja. Če se dva matematika ukvarjata z istim področjem, potem se s tem področjem ukvarjajo tudi vsi matematiki, ki sedijo med njima.

Koza želi za vsaka dva matematika ugotoviti, ali se ukvarjata z istim področjem. Vsakega matematika lahko vpraša naslednje vprašanje: »Koliko izmed vseh 2024 matematikov se ukvarja s tvojim področjem?« Vprašanja postavlja eno za drugim, torej pozna odgovore na vsa prejšnja vprašanja, preden postavi naslednjega.

Določi najmanjše naravno število k, za katerega lahko Koza vedno doseže svoj cilj z največ k vprašanji.

Naloga T–4

Končno zaporedje $x_1, x_2, \ldots, x_r$ naravnih števil imenujemo *palindrom*, če velja $x_i = x_{r+1-i}$ za vsa naravna števila $1 \leq i \leq r$.

Naj bo $a_1, a_2, \ldots$ neskončno zaporedje naravnih števil. Za naravno število $j \geq 2$ naj $a[j]$ označuje končno podzaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Denimo, da obstaja strogo naraščajoče neskončno zaporedje naravnih števil $b_1, b_2, \ldots$, da je za vsako naravno število n, podzaporedje $a[b_n]$ palindrom in $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Dokaži, da obstaja tako naravno število T, da velja $a_i = a_{i+T}$ za vsako naravno število i.

Naloga T–5

Naj bo ABC trikotnik, v katerem velja $\angle BAC = 60^\circ$, in naj bo D takšna točka na premici AC, za katero velja $|AB| = |AD|$ in točka A leži med točkama C in D. Denimo, da obstajata točki $E \neq F$ na krožnici očrtani trikotniku DBC, za kateri velja $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokaži, da premica EF poteka skozi središče krožnice očrtane trikotniku ABC.

Naloga T–6

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik in naj bo M razpolovišče stranice BC. Naj bodo I, J in K zaporedoma središča včrtanih krožnic trikotnikov ABC, ABM in ACM. Naj bosta P in Q zaporedoma točki na premicah MK in MJ, da velja $\angle AJP = \angle ABC$ in $\angle AKQ = \angle BCA$. Naj bo še R presečišče premic CP in BQ. Dokaži, da sta premici IR in BC pravokotni.

Naloga T–7

Pravimo, da naravna števila *zlepimo*, če postavimo njihove desetiške zapise enega za drugim in rezultat obravnavamo kot eno samo naravno število v desetiškem zapisu.

Določi vsa naravna števila k, za katere obstaja naravno število N_k z naslednjo lastnostjo: za vse $n \geq N_k$ lahko števila $1, 2, \ldots, n$ zlepimo v nekem vrstnem redu, da je dobljeno število deljivo s k.

Opomba. Desetiški zapis naravnega števila se nikoli ne začne z ničlo.

Primer. Če zlepimo števila $15, 14, 7$ v tem vrstnem redu dobimo število 15147.

Naloga T–8

Naj bo k naravno število in $a_1, a_2, \ldots$ neskončno zaporedje naravnih števil, tako da velja

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

za vsa naravna števila i. Dokaži, da obstaja naravno število M, da velja $a_n = a_{n+1}$ za vsa naravna števila $n \geq M$.