Úloha T–1

Uvažujme dve nekonečné postupnosti reálnych čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ také, že $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ a

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

pre každé celé číslo $k \geq 0$. Dokážte, že platí $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Úloha T–2

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

Úloha T–3

Na brehu rieky Tisa sedí v rade 2024 matematikov. Každý z nich pracuje na práve jednej výskumnej téme, pričom ak dvaja matematici pracujú na rovnakej téme, tak na nej pracujú aj všetci matematici sediaci medzi nimi.

Marvin chce zistiť pre každú dvojicu matematikov, či pracujú na rovnakej téme. Môže sa spýtať ľubovoľného matematika nasledovnú otázku „Koľko z týchto 2024 matematikov pracuje na tvojej téme?“ Marvin sa pýta otázky postupne, takže kým sa spýta ďalšiu otázku, tak vie odpovede na všetky predošlé otázky.

Určte najmenšie kladné celé číslo k také, že Marvin vie splniť svoj cieľ za použitia najviac k otázok.

Úloha T–4

Konečná postupnosť $x_1, x_2, \ldots, x_r$ kladných celých čísel je *palindróm*, ak platí $x_i = x_{r+1-i}$ pre všetky celé čísla $1 \leq i \leq r$.

Nech $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Pre kladné celé číslo $j \geq 2$ označme $a[j]$ konečnú podpostupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Predpokladajme, že existuje (ostro) rastúca nekonečná postupnosť $b_1, b_2, \ldots$ kladných celých čísel taká, že pre každé kladné celé číslo n je podpostupnosť $a[b_n]$ palindróm a platí $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo T také, že platí $a_i = a_{i+T}$ pre každé kladné celé číslo i.

Úloha T–5

Nech ABC je trojuholník, pre ktorý platí $|\measuredangle BAC| = 60°$. Nech D je bod na priamke AC taký, že platí $|AB| = |AD|$, pričom A leží medzi C a D. Predpokladajme, že na kružnici opísanej trojuholníku DBC ležia body $E \neq F$ také, že platí $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokážte, že priamka EF prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Úloha T–6

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Nech M je stred úsečky BC. Nech I, J, K sú postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, ABM, ACM. Nech P, Q sú body postupne na priamkach MK, MJ také, že platí $|\measuredangle AJP| = |\measuredangle ABC|$ a $|\measuredangle AKQ| = |\measuredangle BCA|$. Nech R je priesečník priamok CP a BQ. Dokážte, že priamky IR a BC sú na seba kolmé.

Úloha T–7

Zlepenie kladných celých čísel prebieha tak, že ich zápisy v desiatkovej sústave zapíšeme postupne za sebou a výsledok interpretujeme ako zápis jedného kladného celého čísla v desiatkovej sústave.

Nájdite všetky kladné celé čísla k, pre ktoré existuje celé číslo N_k s nasledovnou vlastnosťou: pre všetky $n \geq N_k$ možno v nejakom poradí zlepiť čísla $1, 2, \ldots, n$ tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné číslom k.

Poznámka. Zápis v desiatkovej sústave sa nemôže začínať nulou.

Príklad. Zlepením čísel 15, 14, 7 v tomto poradí získame číslo 15 147.

Úloha T–8

Nech k je kladné celé číslo a nech $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel taká, že platí

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

pre všetky celé čísla $i \geq 1$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo M také, že platí $a_n = a_{n+1}$ pre všetky celé čísla $n \geq M$.