Zadanie T–1

Dane są dwa nieskończone ciągi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i $b_0, b_1, b_2, \ldots$ liczb rzeczywistych takie, że $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ oraz

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$. Udowodnić, że $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Zadanie T–2

Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie T–3

Na brzegu rzeki Tiszy 2024 matematyków siedzi w rzędzie. Każdy z nich pracuje nad dokładnie jednym tematym badawczym, a jeśli dwaj matematycy pracują nad tym samym tematem, to każdy siedzący między nimi również nad nim pracuje.

Marvin chce stwierdzić, dla każdej pary matematyków, czy pracują nad tym samym tematem. Może on zadać dowolnemu matematykowi następujące pytanie: „Ilu z tych 2024 matematyków pracuje nad twoim tematem?” Zadaje pytania po kolei, więc zadając każde z nich zna odpowiedzi na wszystkie swoje poprzednie pytania.

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią k, że Marvin zawsze może spełnić swój cel zadając maksymalnie k pytań.

Zadanie T–4

Skończony ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dodatnich liczb całkowitych nazwiemy *palindromem*, jeśli $x_i = x_{r+1-i}$ dla wszystkich liczb całkowitych $1 \leq i \leq r$.

Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Dla dodatniej liczby całkowitej $j \geq 2$, oznaczmy przez $a[j]$ skończony ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Załóżmy, że istnieje nieskończony silnie rosnący ciąg $b_1, b_2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych taki, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n ciąg $a[b_n]$ jest palindromem oraz $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita T taka, że $a_i = a_{i+T}$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej i.

Zadanie T–5

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle BAC = 60°$. Niech D będzie punktem na prostej AC takim, że $AB = AD$ oraz A leży pomiędzy C i D. Punkty $E \neq F$ leżące na okręgu opisanym na trójkącie DBC spełniają $AE = AF = BC$. Udowodnić, że prosta EF przechodzi przez środek okręgu opisanego na ABC.

Zadanie T–6

Punkt M jest środkiem boku BC w trójkącie ostrokątnym ABC. Niech punkty I, J, K będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, ABM, ACM. Niech P, Q będą punktami leżącymi odpowiednio na prostych MK, MJ takimi, że $\angle AJP = \angle ABC$ oraz $\angle AKQ = \angle BCA$. Niech punkt R będzie punktem przecięcia prostych CP i BQ. Udowodnić, że proste IR i BC są prostopadłe.

Zadanie T–7

Sklejeniem liczb całkowitych dodatnich nazywamy zapisanie ich reprezentacji dziesiętnych jedna po drugiej tworząc w ten sposób nową liczbę całkowitą dodatnią.

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których istnieje liczba całkowita N_k o następującej własności: dla wszystkich $n \geq N_k$ możemy skleić liczby $1, 2, \ldots, n$ w pewnej kolejności tak, że powstała liczba jest podzielna przez k.

Uwaga. Reprezentacja dziesiętna liczby całkowitej dodatniej nigdy nie zaczyna się od zera.

Przykład. Sklejenie $15, 14, 7$ w tej kolejności daje liczbę 15147.

Zadanie T–8

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb całkowitych takim, że

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

dla wszystkich liczb całkowitych $i \geq 1$. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita M taka, że $a_n = a_{n+1}$ dla wszystkich liczb całkowitych $n \geq M$.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.