Užduotis T–1

Nagrinėkime dvi tokias begalines realiųjų skaičių sekas $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ir $b_0, b_1, b_2, \ldots$, kad $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ ir

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

kiekvienam sveikajam skaičiui $k \geq 0$. Įrodykite, kad $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Užduotis T–2

Raskite visas tokias funkcijas $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$.

Užduotis T–3

Prie Tisos upės eilėje sėdi 2024 matematikai. Kiekvienas iš jų dirba prie lygiai vienos tiriamojo darbo temos, ir jeigu du matematikai dirba prie tos pačios temos, tada prie jos dirba ir visi tarp jų sėdintys matematikai.

Kiekvienai porai matematikų, Marvinas bando išsiaiškinti, ar jie dirba prie tos pačios temos. Jis gali klausti kiekvieno matematiko šio klausimo: „Kiek iš šių 2024 matematikų dirba prie tos pačios temos kaip tu?“ Šiuos klausimus jis užduoda po vieną, žinodamas visus ankstesnius atsakymus prieš užduodamas kitą klausimą. Raskite mažiausią tokį teigiamą sveikąjį skaičių k, kad Marvinas gali pasiekti savo tikslą užduodamas daugiausia k klausimų.

Užduotis T–4

Baigtinę teigiamų sveikųjų skaičių seką $x_1, x_2, \ldots, x_r$ vadinkime *palindromu*, jeigu $x_i = x_{r+1-i}$ visiems sveikiesiems skaičiams $1 \leq i \leq r$.

Tegu $a_1, a_2, \ldots$ yra begalinė teigiamų sveikųjų skaičių seka. Bet kokiam tegiamam sveikajam skaičiui $j \geq 2$, baigtinį posekį $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ pažymėkime $a[j]$. Tarkime, kad egzistuoja tokia begalinė griežtai didėjanti teigiamų sveikųjų skaičių seka $b_1, b_2, \ldots$, kad kiekvienam teigiamam sveikajam skaičiui n, posekis $a[b_n]$ yra palindromas, ir $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Įrodykite, kad egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius T, kad $a_i = a_{i+T}$ kiekvienam teigiamam sveikajam skaičiui i.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–5

Tegu ABC yra trikampis su $\angle BAC = 60°$. Tegu D yra toks taškas ant tiesės AC, kad $AB = AD$ ir A yra tarp C ir D. Tarkime ant apskritimo, apibrėžto apie trikampį DBC, yra du tokie taškai $E \neq F$, kad $AE = AF = BC$. Įrodykite, kad tiesė EF eina per ABC apibrėžtinio apskritimo centrą.

Užduotis T–6

Tegu ABC yra smailusis trikampis. Tegu M yra atkarpos BC vidurio taškas. Tegu I, J, K yra atitinkamai trikampių ABC, ABM, ACM įbrėžtinių apskritimų centrai. Tegu P, Q yra taškai atitinkamai ant tiesių MK, MJ tokie, kad $\angle AJP = \angle ABC$ ir $\angle AKQ = \angle BCA$. Tegu R yra tiesių CP ir BQ susikirtimo taškas. Įrodykite, kad tiesės IR ir BC yra statmenos.

Užduotis T–7

Apibrėžkime teigiamų sveikųjų skaičių *klijavimą* kaip jų užrašymą vieną po kito dešimtainėje sistemoje ir interpretuojant gautą vieną teigiamą sveikąjį skaičių dešimtainėje sistemoje.

Raskite visus teigiamus sveikuosius skaičius k, kuriems egzistuoja sveikasis skaičius N_k tenkinantis savybę: visiems $n \geq N_k$, galima suklijuoti skaičius $1, 2, \ldots, n$ kažkokia tvarka taip, kad gautas skaičius dalintųsi iš k.

Pastaba. Teigiamas sveikasis skaičius dešimtainėje sistemoje niekada neprasideda nuliu.

Pavyzdys. Klijavimas $15, 14, 7$ šia tvarka sudaro 15147.

Užduotis T–8

Tegu k yra teigiamas sveikasis skaičius ir $a_1, a_2, \ldots$ yra tokia begalinė teigiamų sveikųjų skaičių seka, kad

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

visiems sveikiesiems skaičiams $i \geq 1$. Įrodykite, kad egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius M, kad $a_n = a_{n+1}$ visiems sveikiesiems skaičiams $n \geq M$.