T–1. Feladat

Legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ és $b_0, b_1, b_2, \ldots$ valós számok két végtelen sorozata, melyekre $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ és

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

teljesül minden $k \geq 0$ egészre. Bizonyítsátok be, hogy $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

T–2. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re.

T–3. Feladat

A Tisza partján 2024 matematikus ül egy sorban. Mindegyikük pontosan egy kutatási témán dolgozik, és ha két matematikus azonos témán dolgozik, akkor az összes közöttük ülő matematikus is ugyanezen a témán dolgozik.

Marvin az összes, két matematikusból álló párra ki szeretné deríteni, hogy azonos témán dolgoznak-e vagy sem. Ehhez bármely matematikustól megkérdezheti az alábbi kérdést: „A 2024 matematikus közül hányan dolgoznak a témádon?” A kérdéseket egyesével teszi fel, így mielőtt feltesz egy kérdést, már tudja az összes előzőre kapott választ.

Határozzátok meg a legkisebb k pozitív egészt, melyre Marvin mindenképpen teljesíteni tudja a célját legfeljebb k kérdéssel.

T–4. Feladat

Egy pozitív egészekből álló $x_1, x_2, \ldots, x_r$ véges sorozatot *palindromnak* nevezünk, ha $x_i = x_{r+1-i}$ teljesül minden $1 \leq i \leq r$ egészre.

Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy pozitív egészekből álló végtelen sorozat. Egy $j \geq 2$ pozitív egészre jelölje $a[j]$ az $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ véges részsorozatot. Tegyük fel, hogy létezik egy szigorúan monoton növekvő, pozitív egészekből álló $b_1, b_2, \ldots$ végtelen sorozat úgy, hogy minden n pozitív egészre az $a[b_n]$ részsorozat palindrom, továbbá $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan T pozitív egész, melyre $a_i = a_{i+T}$ teljesül minden i pozitív egészre.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen ABC egy olyan háromszög, melyben $BAC\sphericalangle = 60°$. Legyen D az AC egyenes egy pontja, melyre $AB = AD$ és az A pont C és D között fekszik. Tegyük fel, hogy $E \neq F$ két olyan pont a DBC háromszög köréírt körén, melyekre $AE = AF = BC$. Bizonyítsátok be, hogy az EF egyenes áthalad az ABC háromszög köréírt körének középpontján.

T–6. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Legyen a BC szakasz felezőpontja M. Legyen I, J, K rendre az ABC, ABM, ACM háromszögek beírt körének középpontja. Legyenek P, Q rendre az MK, MJ egyeneseken olyan pontok, hogy $AJP\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ és $AKQ\sphericalangle = BCA\sphericalangle$. Legyen a CP és BQ egyenesek metszéspontja R. Bizonyítsátok be, hogy az IR és BC egyenesek merőlegesek egymásra.

T–7. Feladat

Nevezzük pozitív egészek *összeragasztásának* a tízes számrendszerbeli alakjuk egymás után írását, majd a kapott eredmény leolvasását egyetlen, tízes számrendszerben írt pozitív egészként.

Adjátok meg az összes olyan pozitív egész k számot, melyre létezik N_k egész az alábbi tulajdonsággal: minden $n \geq N_k$-ra az $1, 2, \ldots, n$ számok összeragaszthatók valamilyen sorrendben úgy, hogy az eredmény osztható legyen k-val.

Megjegyzés. A tízes számrendszerbeli alakja egy pozitív egésznek sosem kezdődik 0-val.

Példa. A $15, 14, 7$ számok ilyen sorrendbeli összeragasztása 15147.

T–8. Feladat

Legyen k egy pozitív egész és $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egészek egy végtelen sorozata, melyre

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

teljesül minden $i \geq 1$ egészre. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan M pozitív egész, melyre $a_n = a_{n+1}$ teljesül minden $n \geq M$ egészre.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.