Zadatak T–1

Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i $b_0, b_1, b_2, \ldots$ beskonačni nizovi realnih brojeva takvi da je $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ i

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

za sve cijele brojeve $k \geqslant 0$. Dokaži da je $a_{2024} + b_{2024} \geqslant 88$.

Zadatak T–2

Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak T–3

Pokraj rijeke Tise redom sjedi 2024 matematičara. Svaki od njih radi na točno jednoj temi, a ako dva matematičara rade na istoj temi, svi matematičari između njih također rade na istoj toj temi.

Ilko pokušava, za svaki par matematičara, odrediti rade li na istoj temi. Dozvoljeno mu je svakog matematičara pitati: „Koliko od ovih 2024 matematičara rade na tvojoj temi?” Pitanja postavlja jedno po jedno, te zna sve prethodne odgovore prije nego što postavi iduće pitanje.

Odredi najmanji prirodan broj k takav da Ilko uvijek može postići svoj cilj s najviše k pitanja.

Zadatak T–4

Konačan niz $x_1, x_2, \ldots, x_r$ prirodnih brojeva je *palindrom* ako je $x_i = x_{r+1-i}$ za sve prirodne brojeve $1 \leqslant i \leqslant r$.

Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Za prirodan broj $j \geqslant 2$, s $a[j]$ označavamo konačan podniz $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Pretpostavimo da postoji beskonačan strogo rastuć niz $b_1, b_2, \ldots$ prirodnih brojeva takav da je za svaki prirodni broj n podniz $a[b_n]$ palindrom te vrijedi $b_{n+2} \leqslant b_{n+1} + b_n$. Dokaži da postoji prirodan broj T takav da je $a_i = a_{i+T}$ za sve prirodne brojeve i.

Zadatak T–5

Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle BAC = 60°$. Neka je D točka na pravcu AC takva da je $|AB| = |AD|$ i da A leži između C i D. Pretpostavimo da postoje dvije točke $E \neq F$ na opisanoj kružnici trokuta DBC takve da je $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokaži da pravac EF prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC.

Zadatak T–6

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$, te neka su I, J, K središta upisanih kružnica trokutā ABC, ABM, ACM redom. Neka su P, Q točke na pravcima MK, MJ redom takve da su $\sphericalangle AJP = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle AKQ = \sphericalangle BCA$. Neka je R sjecište pravaca CP i BQ. Dokaži da su pravci IR i BC okomiti.

Zadatak T–7

Definiramo *spajanje* prirodnih brojeva kao pisanje njihovih dekadskih zapisa jednog za drugim i shvaćanje rezultata kao dekadski zapis nekog prirodnog broja.

Nađi sve prirodne brojeve k za koje postoji prirodan broj N_k sa sljedećim svojstvom: za sve $n \geqslant N_k$ možemo spojiti brojeve $1, 2, \ldots, n$ u nekom poretku tako da dobijemo broj djeljiv s k.

Opaska. Dekadski zapis prirodnog broja nikad ne počinje s nulom.

Primjer. Spajanjem $15, 14, 7$ u tom poretku dobivamo 15147.

Zadatak T–8

Neka je k prirodan broj te $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva takav da

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

za sve prirodne brojeve i. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_n = a_{n+1}$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant M$.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.