Problème T–1

On considère les deux suites infinies $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et $b_0, b_1, b_2, \ldots$ de nombres réels telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

pour chaque entier $k \geq 0$. Prouver que $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Problème T–2

Déterminer toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Problème T–3

Il y a 2024 mathématiciens assis côte à côte près de la rivière Tisza. Chacun d'entre eux travaille sur un seul sujet de recherche et si deux mathématiciens travaillent sur le même sujet, tous ceux qui sont assis entre eux travaillent également sur ce sujet.

Maret essaie de déterminer pour chaque paire de mathématiciens s'ils travaillent sur le même sujet. Il est autorisé à poser la question suivante à chaque mathématicien : « Combien de ces 2024 mathématiciens travaillent sur votre sujet ? » Il pose les questions une par une, de sorte qu'il connaît toutes les réponses précédentes avant de poser la question suivante.

Déterminer le plus petit entier strictement positif k tel que Maret puisse toujours atteindre son but avec au plus k questions.

Problème T–4

Une suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ d'entiers strictement positifs est un *palindrome* si $x_i = x_{r+1-i}$ pour tous les entiers $1 \leq i \leq r$. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Pour un entier $j \geq 2$, on note $a[j]$ la sous-suite finie $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante $b_1, b_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour tout entier strictement positif n, la sous-suite $a[b_n]$ est un palindrome et $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Prouver qu'il existe un entier strictement positif T tel que $a_i = a_{i+T}$ pour tout entier strictement positif i.

Problème T–5

Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soit D un point de la droite (AC) tel que $AB = AD$ et que A se trouve entre C et D. On suppose qu'il existe deux points $E \neq F$ sur le cercle circonscrit de DBC tels que $AE = AF = BC$. Prouver que la droite (EF) passe par le centre du cercle circonscrit de ABC.

Problème T–6

Soit ABC un triangle aigu. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soient I, J, K les centres des cercles inscrits de ABC, ABM, ACM, respectivement. Soient P, Q des points sur les droites (MK), (MJ), respectivement, tels que $\widehat{AJP} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AKQ} = \widehat{BCA}$. Soit R l'intersection des droites (CP) et (BQ). Prouver que les droites (IR) et (BC) sont perpendiculaires.

Problème T–7

On définit le *collage* d'entiers strictement positifs comme l'écriture de leurs représentations en base dix l'une après l'autre et l'interprétation du résultat comme un seul entier strictement positif en base dix.

Trouver tous les entiers strictement positifs k pour lesquels il existe un entier N_k ayant la propriété suivante : pour tout $n \geq N_k$, on peut coller les nombres $1, 2, \ldots, n$ dans un certain ordre de sorte que le résultat soit un nombre divisible par k.

Remarque. La représentation en base dix d'un entier strictement positif ne commence jamais par zéro.

Exemple. En collant $15, 14, 7$ dans cet ordre, on obtient 15147.

Problème T–8

Soit k un entier strictement positif et $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs telle que

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

pour tous les entiers $i \geq 1$. Prouver qu'il existe un entier strictement positif M tel que $a_n = a_{n+1}$ pour tous les entiers $n \geq M$.