Teamwettbewerb
27. August 2024

German version

Aufgabe T–1

Betrachte die zwei unendlichen Folgen $a_0, a_1, a_2, \dots$ und $b_0, b_1, b_2, \dots$ reeller Zahlen mit $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ und

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$. Zeige, dass $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Aufgabe T–2

Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

gilt.

Aufgabe T–3

Es sitzen 2024 Mathematigerinnen in einer Reihe am Ufer des Flusses Tisza. Jede von ihnen arbeitet an genau einem Forschungsthema. Falls zwei Mathematigerinnen am selben Thema arbeiten, arbeiten auch alle Mathematigerinnen, die zwischen ihnen sitzen, an diesem Thema.

Marvin versucht, für jedes Paar von Mathematigerinnen herauszufinden, ob sie am selben Forschungsthema arbeiten. Er darf dafür jeder Mathematigerin die folgende Frage stellen: „Wie viele von diesen 2024 Mathematigerinnen arbeiten an deinem Forschungsthema?“ Er stellt diese Fragen nacheinander. Er kennt also alle bisherigen Antworten, bevor er die nächste Frage stellt.

Bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, sodass Marvin sein Ziel stets mit höchstens k Fragen erreichen kann.

Aufgabe T–4

Eine endliche Folge $x_1, x_2, \dots, x_r$ positiver ganzer Zahlen ist ein *Palindrom*, falls $x_i = x_{r+1-i}$ für jede ganze Zahl $1 \leq i \leq r$ gilt.

Sei $a_1, a_2, \dots$ eine unendiche Folge positiver ganzer Zahlen. Für jede positive ganze Zahl $j \geq 2$ bezeichne $a[j]$ die endliche Teilfolge $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$. Angenommen, es existiert eine unendliche, streng monoton wachsende Folge $b_1, b_2, \dots$ positiver ganzer Zahlen derart, dass für jede positive ganze Zahl n die Teilfolge $a[b_n]$ ein Palindrom ist und $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$ gilt.

Zeige, dass eine positive ganze Zahl T existiert, sodass $a_i = a_{i+T}$ für jede positive ganze Zahl i gilt.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

Aufgabe T–5

Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60°$. Sei D ein Punkt auf der Gerade AC, sodass $AB = AD$ gilt und A zwischen C und D liegt. Angenommen, es existieren zwei Punkte $E \neq F$ auf dem Umkreis des Dreiecks DBC, sodass $AE = AF = BC$. Zeige, dass die Gerade EF duch den Umkreismittelpunkt von ABC verläuft.

Aufgabe T–6

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Sei M der Mittelpunkt der Strecke BC. Seien I, J und K die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABC, ABM bzw. ACM. Seien P und Q Punkte auf den Geraden MK bzw. MJ derart, dass $\sphericalangle AJP = \sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle AKQ = \sphericalangle BCA$. Sei R der Schnittpunkt der Geraden CP und BQ. Zeige, dass die Geraden IR und BC rechtwinklig zueinander sind.

Aufgabe T–7

Positive ganze Zahlen *zusammenkleben* sei so definiert, dass man ihre Darstellungen im Dezimalsystem hintereinaner schreibt und das Ergebnis als die Darstellung einer einzelnen positiven ganzen Zahl im Dezimalsystem interpretiert.

Finde alle positiven ganzen Zahlen k, für welche eine ganze Zahl N_k mit folgender Eigenschaft existiert: Für jedes $n \geq N_k$ können wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in geeigneter Reihenfolge so zusammenkleben, dass das Resultat eine durch k teilbare Zahl ist.

Bemerkung. Die Darstellung einer positiven ganzen Zahl im Dezimalsystem startet niemals mit Null.

Beispiel. Zusammenkleben von 15, 14 und 7 in dieser Reihenfolge ergibt 15147.

Aufgabe T–8

Seien k eine positive ganze Zahl und $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen, sodass

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

für alle ganzen Zahlen $i \geq 1$ gilt. Zeige, dass eine positive ganze Zahl M existiert, sodass $a_n = a_{n+1}$ für alle ganzen Zahlen $n \geq M$ gilt.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.