Příklad T–1

Uvažme dvě nekonečné posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reálných čísel takové, že $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ a

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

pro každé celé číslo $k \geq 0$. Dokažte, že $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Příklad T–2

Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Příklad T–3

U Vltavy sedí v řadě 2024 matematiků. Každý z nich se zabývá právě jedním výzkumným tématem a pokud se dva matematici zabývají stejným tématem, všichni sedící mezi nimi se jím zabývají také.

Karel má za úkol pro každou dvojici matematiků zjistit, zda se zabývají stejným tématem. Může se libovolného matematika zeptat na následující otázku: „Kolik z přítomných 2024 matematiků se zabývá tvým tématem?“ Otázky pokládá po jedné, tedy vždy, když se ptá, tak ví všechny předchozí odpovědi.

Nalezněte nejmenší kladné celé číslo k takové, že Karel vždy zvládne splnit svůj úkol položením nejvýše k otázek.

Příklad T–4

Konečná posloupnost kladných celých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_r$ je *palindrom*, pokud $x_i = x_{r+1-i}$ pro všechna celá čísla $1 \leq i \leq r$.

Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Pro kladné celé číslo $j \geq 2$ označme $a[j]$ její konečnou podposloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Předpokládejme, že existuje ostře rostoucí nekonečná posloupnost kladných celých čísel $b_1, b_2, \ldots$ taková, že pro každé kladné celé číslo n je posloupnost $a[b_n]$ palindrom a $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Dokažte, že existuje kladné celé číslo T takové, že $a_i = a_{i+T}$ pro každé kladné celé číslo i.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.

Příklad T–5

Mějme trojúhelník ABC, ve kterém platí $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Označme D bod na přímce AC takový, že $|AB| = |AD|$ a A leží mezi C a D. Předpokládejme, že existují body $E \neq F$ na kružnici opsané trojúhelníku DBC takové, že $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokažte, že přímka EF prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Příklad T–6

Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme M střed strany BC. Dále označme I, J, K postupně středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ABM, ACM. Dále označme P, Q postupně body na přímkách MK, MJ takové, že $|\sphericalangle AJP| = |\sphericalangle ABC|$ a $|\sphericalangle AKQ| = |\sphericalangle BCA|$. Nakonec označme R průsečík přímek CP a BQ. Dokažte, že přímky IR a BC jsou na sebe kolmé.

Příklad T–7

Definujeme *slepení* kladných celých čísel jako jejich napsání v desítkové soustavě postupně za sebou a interpretování výsledku jako zápis jednoho kladného celého čísla v desítkové soustavě.

Najděte všechna kladná celá čísla k, pro která existuje celé číslo N_k s následující vlastností: pro všechna $n \geq N_k$ lze v nějakém pořadí slepit čísla $1, 2, \ldots, n$ tak, aby výsledné číslo bylo dělitelné k.

Poznámka. Zápis kladného celého čísla v desítkové soustavě nikdy nezačíná nulou.

Příklad. Slepení $15, 14, 7$ v tomto pořadí má výsledek 15147.

Příklad T–8

Nechť k je kladné celé číslo a $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel taková, že

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

pro všechna celá čísla $i \geq 1$. Dokažte, že existuje kladné celé číslo M takové, že $a_n = a_{n+1}$ pro všechna celá čísla $n \geq M$.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.