Naloga I–1

Določi vse $k \in \mathbb{N}_0$, za katere obstaja funkcija $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, da velja $f(2024) = k$ in

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Opomba. Simbol $\mathbb{N}_0$ označuje množico nenegativnih celih števil.

Naloga I–2

List papirja (kot je tale) je položen na neskončno tablo. Marvin na skrivaj izbere konveksen 2024-kotnik P, ki v celoti leži na listu papirja. Tigerin želi določiti vsa oglišča P. V vsakem koraku Tigerin na tablo nariše premico g, ki v celoti leži izven lista papirja, Marvin pa nato nariše premico h vzporedno g, ki poteka skozi vsaj eno oglišče P in je premici g najbližja. Dokaži, da obstaja tako naravno število n, da lahko Tigerin vedno določi vsa oglišča P v največ n korakih.

Naloga I–3

Naj bo ABC ostrokoten raznostraničen trikotnik. Izberemo krožnico ω, ki poteka skozi točki B in C ter drugič seka daljici AB in AC zaporedoma v točkah $D \neq A$ in $E \neq A$. Naj bo F presečišče premic BE in CD in naj bo G takšna točka na krožnici očrtani trikotniku ABF, da je premica GB tangentna na ω. Podobno, naj bo H takšna točka na krožnici očrtani trikotniku ACF, da je premica HC tangentna na ω. Dokaži, da obstaja točka $T \neq A$ neodvisna od izbire ω, da krožnica očrtana trikotniku AGH poteka skozi točko T.

Naloga I–4

Za vsako naravno število n naj $\sigma(n)$ označuje vsoto vseh pozitivnih deliteljev števila n. Določi vse polinome $P(x)$ s celoštevilskimi koeficienti, da $\sigma(k)$ deli $P(k)$ za vsako naravno število k.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.