Úloha I–1

Určte všetky $k \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré existuje funkcia $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taká, že $f(2024) = k$ a

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

platí pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka. Symbolom $\mathbb{N}_0$ značíme množinu nezáporných celých čísel.

Úloha I–2

Na nekonečnej tabuli sa nachádza list papiera (taký ako tento). Marvin si tajne zvolí konvexný 2024-uholník, ktorý sa nachádza celý na papieri. Tigrica chce nájsť vrcholy 2024-uholníka P. V každom kroku Tigrica narysuje na tabuľu priamku g, ktorá je celá mimo papier, potom Marvin odpovie priamkou h rovnobežnou s priamkou g, ktorá je zo všetkých rovnobežných priamok prechádzajúcich aspoň jedným vrcholom 2024-uholníka P najbližšie k priamke g. Dokážte, že existuje kladné celé číslo n také, že Tigrica vie vždy nájsť vrcholy 2024-uholníka P za najviac n krokoch.

Úloha I–3

Nech ABC je ostrouhlý rôznostranný trojuholník. Zvoľme kružnicu ω prechádzajúcu bodmi B a C, ktorá pretne druhýkrát úsečky AB a AC postupne v bodoch $D \neq A$ a $E \neq A$. Nech F je priesečník priamok BE a CD. Nech G je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABF taký, že GB je dotyčnicou kružnice ω. Podobne, nech H je bod na kružnici opísanej trojuholníku ACF taký, že HC je dotyčnicou kružnice ω. Dokážte, že existuje taký bod $T \neq A$, ktorý nezávisí na voľbe kružnice ω, že kružnica opísaná trojuholníku AGH prechádza bodom T.

Úloha I–4

Pre ľubovoľné kladné celé číslo n označme $\sigma(n)$ súčet kladných deliteľov čísla n. Určte všetky mnohočleny $P(x)$ s celočíselnými koeficientami také, že $P(k)$ je deliteľné číslom $\sigma(k)$ pre všetky kladné celé čísla k.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.