Zawody indywidualne
26 sierpnia 2024

Polish version

Zadanie I–1

Znaleźć wszystkie $k \in \mathbb{N}_0$, dla których istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taka, że $f(2024) = k$ oraz

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

Uwaga. Tu $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór nieujemnych liczb całkowitych.

Zadanie I–2

Kartka papieru (taka jak ta) znajduje się na nieskończonej tablicy. Marvin w tajemnicy wybiera 2024-kąt wypukły P, który leży w całości na tej kartce. Tigerin chce znaleźć wszystkie wierzchołki P. W jednym ruchu Tigerin może narysować na tablicy prostą g, leżącą w pełni poza kartką. Następnie Marvin odpowiada rysując prostą h, która zawiera przynajmniej jeden wierzchołek P, jest równoległa do g i leży możliwie najbliżej niej. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba naturalna n taka, że Tigerin może zawsze wyznaczyć wszystkie wierzchołki P w co najwyżej n ruchach.

Zadanie I–3

Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC. Wybrano okrąg ω przechodzący przez B i C przecinający ponownie boki AB i AC w punktach odpowiednio $D \neq A$ i $E \neq A$. Niech F będzie punktem przecięcia BE i CD. Dalej, niech G będzie takim punktem na okręgu opisanym na ABF, że GB jest styczne do ω. Analogicznie, niech H będzie takim punktem na okręgu opisanym na ACF, że HC jest styczne do ω. Udowodnić, że istnieje taki punkt $T \neq A$, niezależny od wyboru ω, że okrąg opisany na AGH przechodzi przez T.

Zadanie I–4

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, niech $\sigma(n)$ oznacza sumę jej dodatnich dzielników. Znaleźć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych takie, że $P(k)$ jest podzielne przez $\sigma(k)$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych k.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.