



### Užduotis I–1

Raskite visus  $k \in \mathbb{N}_0$ , kuriems egzistuoja tokia funkcija  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ , kad  $f(2024) = k$  ir

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

visiems  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Pastaba.* Čia  $\mathbb{N}_0$  žymi neneigiamų sveikųjų skaičių aibę.

### Užduotis I–2

Ant begalinės lentos padėtas popieriaus lapas (kaip šis). Marvinas slapčia pasirenka iškiląjį 2024-akampį  $P$ , telpantį ant popieriaus lapo. Tigras nori rasti visas  $P$  viršūnes. Kiekvienu ėjimu Tigras ant lentos nubrėžia tiesę  $g$ , kuri nesikerta su popieriaus lapu, o Marvinas atsako su tiese  $h$ , kuri yra lygiagreti  $g$ , eina per bent vieną  $P$  viršūnę ir yra artimiausia tokia tiesė nuo  $g$ . Įrodykite, kad egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius  $n$ , kad Tigras visada gali rasti visas  $P$  viršūnes per daugiausia  $n$  ėjimų.

### Užduotis I–3

Tegu  $ABC$  yra smailusis įvairiakraštis trikampis. Pasirenkamas apskritimas  $\omega$  einantis per taškus  $B$  ir  $C$ , kuris dar kartą kerta atkarpas  $AB$  ir  $AC$  atitinkamai taškuose  $D \neq A$  ir  $E \neq A$ . Tegu  $F$  yra  $BE$  ir  $CD$  susikirtimo taškas. Tegu  $G$  yra toks taškas ant apskritimo, apibrėžto apie trikampį  $ABF$ , kad  $GB$  yra  $\omega$  liestinė. Analogiškai, tegu  $H$  yra toks taškas ant apskritimo, apibrėžto apie trikampį  $ACF$ , kad  $HC$  yra  $\omega$  liestinė. Įrodykite, kad egzistuoja toks taškas  $T \neq A$ , kad nepriklausomai nuo  $\omega$  pasirinkimo, apie trikampį  $AGH$  apibrėžtas apskritimas eina per  $T$ .

### Užduotis I–4

Bet kokiam teigiamam sveikajam skaičiui  $n$ , tegul  $\sigma(n)$  žymi visų teigiamų skaičiaus  $n$  daliklių sumą. Raskite visus tokius dauginarius  $P$  su sveikaisiais koeficientais, kad  $P(k)$  dalinasi iš  $\sigma(k)$  visiems teigiamiems sveikiesiems skaičiams  $k$ .