I–1. Feladat

Határozd meg az összes olyan $k \in \mathbb{N}_0$ számot, melyre létezik olyan $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ függvény, hogy $f(2024) = k$ és

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}_0$ számra.

Megjegyzés. A feladatban $\mathbb{N}_0$ a nemnegatív egész számok halmazát jelöli.

I–2. Feladat

Egy végtelen rajztáblára egy papírlap (mint amilyen ez a lap) van ragasztva. Marvin titokban kiválaszt egy P konvex 2024-szöget, mely teljesen a papíron van. Tigerin ki szeretné találni P csúcsait. Egy lépésben Tigerin rajzol egy g egyenest a rajztáblára, mely teljesen a papíron kívül fut, amire Marvin azzal a g-hez legközelebbi, g-vel párhuzamos h egyenessel válaszol, mely áthalad legalább egy csúcsán P-nek. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan n pozitív egész, melyre Tigerin mindenképpen meg tudja határozni P csúcsait legfeljebb n lépésben.

I–3. Feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű, nem egyenlő szárú háromszög. Válasszunk egy B-n és C-n áthaladó ω kört, melynek az AB és AC szakaszokkal vett második metszéspontja rendre $D \neq A$ és $E \neq A$. Legyen BE és CD metszéspontja F. Legyen G az a pont ABF háromszög köréírt körén, melyre GB érinti ω-t. Hasonlóan legyen H az a pont ACF háromszög köréírt körén, melyre HC érinti ω-t. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan, ω választásától független $T \neq A$ pont, melyre az AGH háromszög köréírt köre áthalad T-n.

I–4. Feladat

Egy n pozitív egészre $\sigma(n)$ jelölje n pozitív osztóinak összegét. Határozd meg az összes egész együtthatós P polinomot, melyre $P(k)$ osztható $\sigma(k)$-val minden k pozitív egészre.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.