18TH MEMO
Szeged, 2024

Pojedinačno natjecanje
26. kolovoza 2024.

Croatian version

Zadatak I–1

Nađi sve $k \in \mathbb{N}_0$ za koje postoji funkcija $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takva da je $f(2024) = k$ i vrijedi

$$f(f(n)) \leqslant f(n+1) - f(n)$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Opaska. Ovdje sa $\mathbb{N}_0$ označavamo skup nenegativnih cijelih brojeva.

Zadatak I–2

Na beskonačnoj školskoj ploči nalazi se komad papira (poput ovoga). Matija tajno bira konveksni 2024-terokut P koji se u potpunosti nalazi na papiru. Tea želi pronaći vrhove P. U svakom koraku, Tea može nacrtati pravac g na ploči koji se u potpunosti nalazi izvan papira, na što Matija odgovara s pravcem h paralelnim s g koji prolazi kroz barem jedan vrh P, a najbliži je pravcu g. Dokaži da postoji prirodan broj n takav da Tea može pronaći vrhove P u najviše n koraka.

Zadatak I–3

Neka je ABC šiljastokutan raznostraničan trokut. Odaberimo kružnicu ω koja prolazi kroz B i C te ponovno siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama $D \neq A$ i $E \neq A$ redom. Neka je F sjecište BE i CD. Neka je G točka na opisanoj kružnici trokuta ABF takva da je GB tangenta na ω, te neka je H točka na opisanoj kružnici trokuta ACF takva da je HC tangenta na ω. Dokaži da postoji točka $T \neq A$, neovisna o odabiru ω, takva da opisana kružnica trokuta AGH prolazi kroz T.

Zadatak I–4

Za prirodan broj n, neka $\sigma(n)$ označava zbroj pozitivnih djelitelja n. Nađi sve polinome P s cjelobrojnim koeficijentima takve da $\sigma(k)$ dijeli $P(k)$ za sve prirodne brojeve k.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.