Problème I–1

Déterminer tous les $k \in \mathbb{N}_0$ pour lesquels il existe une fonction $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ telle que $f(2024) = k$ et

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Remarque. Ici, $\mathbb{N}_0$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nul.

Problème I–2

Une feuille de papier (comme celle-ci) est posée sur un tableau noir infini. Marvin choisit secrètement un 2024-gon convexe P qui s'étend entièrement sur la feuille de papier. Tigerin veut trouver les sommets de P. A chaque étape, Tigerin peut tracer une ligne g sur le tableau noir qui est entièrement à l'extérieur de la feuille de papier, puis Marvin répond avec la ligne h parallèle à g qui est la plus proche de g et qui passe par au moins un sommet de P. Prouver qu'il existe un entier positif n tel que Tigerin peut toujours déterminer les sommets de P en au plus n étapes.

Problème I–3

Soit ABC un triangle aigu non isocèle. Choisir un cercle ω passant par B et C qui coupe les segments AB et AC aux points $D \neq A$ et $E \neq A$, respectivement. Soit F l'intersection de BE et CD. Soit G le point du cercle de ABF tel que GB soit tangent à ω. De même, soit H le point du cercle de ACF tel que HC soit tangent à ω. Prouver qu'il existe un point $T \neq A$, indépendant du choix de ω, tel que le cercle de AGH passe par T.

Problème I–4

Pour tout entier strictement positif n, notons $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(k)$ est divisible par $\sigma(k)$ pour tous les entiers strictement positifs k.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.