Aufgabe I–1

Bestimme alle $k \in \mathbb{N}_0$, für die eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert, die $f(2024) = k$ und

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Bemerkung. Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0$ die Menge nichtnegativer ganzer Zahlen.

Aufgabe I–2

Auf einer unendlich großen Tafel sei ein Blatt Papier (wie dieses hier) angebracht. Marvin wählt im Geheimen ein konvexes 2024-Eck P, das vollständig auf dem Blatt Papier liegt. Die Tigerin möchte die Eckpunkte von P herausfinden. In jedem Schritt darf die Tigerin eine Gerade g auf die Tafel zeichnen, die vollständig außerhalb des Blatts verläuft. Anschließend antwortet ihr Marvin mit derjenigen Gerade h parallel zu g, die g am nächsten liegt und durch mindestens einen der Eckpunkte von P verläuft. Zeige, dass es eine positive ganze Zahl n gibt, sodass die Tigerin stets innerhalb von höchstens n Schritten alle Eckpunkte von P exakt bestimmen kann.

Aufgabe I–3

Sei ABC ein spitzwinkliges, ungleichschenkliges Dreieck. Es wird ein Kreis ω gewählt, der durch die Punkte B und C verläuft und die Strecken AB und AC jeweils ein weiteres Mal in den Punkten $D \neq A$ bzw. $E \neq A$ schneidet. Sei F der Schnittpunkt von BE und CD. Sei G der Punkt auf dem Umkreis von ABF, sodass GB den Kreis ω berührt. Ebenso sei H der Punkt auf dem Umkreis von ACF, sodass HC den Kreis ω berührt. Zeige, dass es einen Punkt $T \neq A$ unabhängig von der Wahl von ω gibt, sodass der Umkreis von AGH durch T verläuft.

Aufgabe I–4

Für eine positive ganze Zahl n bezeichne $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n.

Bestimme alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle positiven ganzen Zahlen k der Wert $P(k)$ durch $\sigma(k)$ teilbar ist.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.