Příklad I–1

Určete všechna $k \in \mathbb{N}_0$, pro která existuje funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taková, že $f(2024) = k$ a

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka. $\mathbb{N}_0$ značí množinu všech nezáporných celých čísel.

Příklad I–2

Na nekonečné tabuli leží list papíru (vypadá jako tento...). Medvěd Míša si tajně zvolí konvexní 2024-úhelník P, který celý leží na listě papíru. Tučňák Tom chce najít všechny vrcholy P. Tom může v jednom kroku nakreslit na tabuli přímku g, která neprochází listem papíru. Poté mu Míša vrátí přímku h rovnoběžnou s g takovou, která je ze všech rovnoběžných přímek procházejících alespoň jedním vrcholem P nejblíže ke g. Dokažte, že existuje kladné celé číslo n takové, že Tom umí vždy určit všechny vrcholy P v nanejvýš n krocích.

Příklad I–3

Mějme ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC. Zvolme kružnici ω procházející body B a C, která podruhé protíná úsečky AB a AC postupně v bodech $D \neq A$ a $E \neq A$. Označme F průsečík přímek BE a CD. Dále označme G bod na kružnici opsané trojúhelníku ABF takový, že GB je tečna k ω. Obdobně označme H bod na kružnici opsané trojúhelníku ACF takový, že HC je tečna k ω. Dokažte, že existuje pevný bod $T \neq A$, nezávislý na volbě ω, takový, že kružnice opsaná trojúhelníku AGH prochází bodem T.

Příklad I–4

Pro libovolné kladné celé číslo n označme $\sigma(n)$ součet všech kladných dělitelů n. Určete všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že $P(k)$ je dělitelné $\sigma(k)$ pro všechna kladná celá čísla k.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.