A 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatai

1. feladat. A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i = (a_i, b_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O = (0, 0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

2. feladat. Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1, v_2, \dots, v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1} illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1 \le j \le i$ esetén, ahol $v_{i+1} = v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1, u_2, \dots, u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{k-1}u_k, u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.

3. feladat. Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i = 1, 2, 3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest. (A pontokat modulo 3 számozzuk, tehát $A_4 = A_1$ és $A_5 = A_2$.) Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.