

A 2025. évi Kürschák-verseny feladatai és előzetes megoldásai

Ez a PDF csak belső használatra van. A *hivatalos* PDF-ek a `FeladatlapAVersenyre2025.tex` és a `Megoldasok2025.tex` latexelésével nyerhetők, azokban a kommentek is el vannak rejtve.

1. feladat. Legyen n rögzített pozitív egész. Írjuk fel a $0, 1, \dots, n-1$ számokat egy táblára valamilyen sorrendben. Két szám egymással *inverzióban áll*, ha a nagyobb megelőzi a kisebbet. Egy k számot nevezzünk *sajátságosnak*, ha pontosan k másikkal áll inverzióban. Legfeljebb hány sajátságos szám lehet a táblán?

1. megoldás. Megmutatjuk, hogy egy k szám pontosan akkor sajátságos, ha az őt megelőző számok közül pontosan annyi k -nál kisebb van, mint ahány k -nál nagyobb. Egy k szám inverzióban áll

- azon k -nál kisebb számokkal, amik k után állnak a táblán, illetve
- azon k -nál nagyobb számokkal, amik k előtt állnak a táblán.

Az előbbiek számát jelölje x . Ekkor k pontosan akkor sajátságos, ha az utóbbiak száma $k - x$, ami viszont éppen azon k -nál kisebb számok száma, amik k előtt állnak a táblán.

Következésképp egy szám csak akkor lehet sajátságos, ha páros sok szám előzi meg a táblán (azaz páratlanadik pozícióban áll), így legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ db sajátságos szám állhat a táblán. Ennyi lehet is: tekintsük a

$$0, *, 1, *, 2, *, \dots$$

sorrendet, ahol a $2k + 1$ -edik helyen a k szám áll $k = 0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1$ esetén, míg a $*$ -gal jelölt páros pozíciókban bármilyen szám állhat, ami legalább $\lceil n/2 \rceil$. Ekkor minden $k \in \{0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1\}$ sajátságos, mert k után nincs nála kisebb szám, az előtte lévő $2k$ szám közül pedig minden második nagyobb nála, így valóban pontosan k számmal áll inverzióban.

2. megoldás. Megmutatjuk, hogy a táblán nem lehet két szomszédos sajátságos szám. Tegyük fel, hogy a és b szomszédos számok a táblán (ab vagy ba sorrendben). Legyen $a < b$, és a többi számot osszuk három csoportba nagyság szerint: a -nál kisebbek (*kicsik*), a és b közöttiek (*közepesek*), valamint b -nél nagyobbak (*nagyok*). Jelölje az a, b **előtt** álló kicsi, közepes illetve nagy számok számát rendre x_1, y_1 illetve z_1 . Hasonlóan, az a, b **után** álló kicsi, közepes illetve nagy számok száma legyen x_2, y_2 illetve z_2 . Vegyük észre, hogy a közepes számok száma

$$y_1 + y_2 = b - a - 1.$$

1. eset: ab sorrend

Ekkor a pontosan $x_2 + y_1 + z_1$ számmal áll inverzióban, míg b pontosan $x_2 + y_2 + z_1$ számmal. Ha a és b is sajátságos volna, akkor

$$b - a = (x_2 + y_2 + z_1) - (x_2 + y_1 + z_1) = y_2 - y_1 \leq y_1 + y_2 = b - a - 1,$$

ami ellentmondás.

2. eset: ba sorrend

Ebben az esetben a és b egymással is inverzióban áll, így a pontosan $x_2 + y_1 + z_1 + 1$ számmal áll inverzióban, míg b pontosan $x_2 + y_2 + z_1 + 1$ számmal. Ha tehát a és b is sajátságos volna, akkor

$$a - b = (x_2 + y_1 + z_1 + 1) - (x_2 + y_2 + z_1 + 1) = y_1 - y_2 \leq y_1 + y_2 = a - b - 1,$$

ami ellentmondás.

Ezt a gondolatmenetet esetszétválasztás és képletek nélkül is el lehet mondani: a és b szomszédos számokra tekintsük azokat a számokat, amik pontosan az egyikkel állnak inverzióban. Könnyen meggondolható, hogy ezek éppen a közepes számok, azaz $b - a - 1$ ilyen van. Tehát legfeljebb ennyiben térhet el a és b „inverzió-száma”. Így nem lehet mindkettő sajátos, különben ez az eltérés $b - a$ volna.

Vagyis a sajátos számok között nincsenek szomszédosak, így legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ sajátos szám lehet a táblán. Ennyi elő is fordulhat: tekintsük az

$$n - 1, *, n - 2, *, n - 3, *, \dots$$

sorrendet, ahol a *-gal jelölt páros pozíciókban bármilyen sorrendben állhatnak a maradék számok.

3. megoldás. Schmidt Botond megoldása alapján.

Egy táblán lévő k számra tekintsük a pozícióját (p) illetve a vele inverzióban álló számok számát (i). Azt állítjuk, hogy $k + p + i$ mindig páratlan.

Ez nyilván teljesül, amikor a számok növekvő sorrendben vannak, hiszen ekkor $p = k + 1$ és $i = 0$. Most egy tetszőleges sorrend esetén vizsgáljuk, mi történik, ha két szomszédos számot megcserélünk. Ha nincs köztük k , akkor persze p és i változatlanok maradnak. Ha az egyikük k , akkor pedig mind p , mind i pontosan 1-gyel változik, vagyis $p + i$ paritása ismét változatlan. Mivel szomszédos számok megcserélésével bármilyen sorrendhez eljuthatunk, beláttuk, hogy $k + p + i$ valóban mindig páratlan.

Ha k sajátos, akkor $i = k$, vagyis ekkor $2k + p$ páratlan, azaz ez csak páratlan p pozíciójú számokkal eshet meg.

4. megoldás. Molnár István Ádám megoldása alapján.

Jelölje ℓ a táblán lévő utolsó számot. Ez a nála nagyobb számokkal áll inverzióban, azaz $n - 1 - \ell$ számmal. Vagyis pontosan akkor sajátos, ha $n = 2\ell + 1$. Vagyis ez csak páratlan n esetén következhet be.

Továbbá vegyük észre, hogy ha töröljük ℓ -et a tábláról, valamint minden ℓ -nél nagyobb számot 1-gyel csökkentünk, akkor a sajátosság tulajdonsága nem változik: az ℓ -nél kisebb számok inverzió-száma nem változik; egy ℓ -nél nagyobb számé ugyan 1-gyel csökken, de maga a szám is ugyanígy változik.

Most vegyük az n szám egy tetszőleges sorrendjét. Minden lépésben az utolsó számot a fenti módon törölve elérjük, hogy végül üres legyen a tábla. Az eredeti sorrendben m -edik szám pontosan akkor sajátos, ha $n - m$ törlés után megmaradó m szám közül az utolsó sajátos. Mint láttuk, ez az aktuálisan utolsó szám csak akkor lehet sajátos, ha m páratlan. Ez azonnal mutatja, hogy csak a páratlan pozícióban álló számok lehetnek sajátosak.

Ezzel a megközelítéssel az is könnyen átgondolható, milyen sorrendek esetén lesz minden páratlan pozícióban álló szám sajátos.

2. feladat. Ebben a feladatban tízes számrendszerben felírt számokról lesz szó. Megengedünk nullával kezdődő felírásokat is. Egy páros sok számjegyből álló számot *vágható*nak nevezünk, ha két egyenlő hosszú részre félbevágva a részek összegének négyzete az eredeti szám. Például $2025 = (20 + 25)^2$ és $0001 = (00 + 01)^2$ négyjegyű vágható számok. Bizonyítsuk be, hogy a $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számok száma minden n -re 2 -hatvány.

Megoldás. Legyen $q = 99 \dots 9 = 10^n - 1 = q_1 \cdots q_s$, ahol $q_1, \dots, q_s$ egymáshoz páronként relatív prím prímszámok. Legyen $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, s$); ez 2^s lehetőség. Az $x \equiv \epsilon_i \pmod{q_i}$ ($i = 1, \dots, s$) szimultán kongruenciarendszernek a kínai maradéktétel szerint pontosan egy x megoldása van az $\{1, \dots, q\}$ halmazban, hiszen ez teljes maradékrendszer mod $q_1 \cdots q_s$. Ekkor x^2 egy $2n$ -jegyű vágható pozitív egész szám. Valóban, legyen $x^2 = 10^n u + v$, ahol $u, v \in \{0, \dots, q\}$. Ekkor $u < x$, emiatt $x - q \leq 0 < u + v < x + q$, továbbá $u + v \equiv (q + 1)u + v = x^2 \equiv \epsilon_i^2 = \epsilon_i \equiv x \pmod{q_i}$ minden i -re, ahonnan $u + v \equiv x \pmod{q}$; emiatt $u + v = x$.

Minden $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számot pontosan egyszer kapunk meg a fenti eljárással. Valóban, ha legalább egy ϵ_i értékét megváltoztatjuk, akkor x és így x^2 is megváltozik. Másrészt, ha $10^n u + v = (u + v)^2$ egy $2n$ -jegyű vágható pozitív egész szám, akkor legyen $x = u + v \in \{1, \dots, q\}$. Ekkor $x(x - 1) = x^2 - x = qu$, de x és $x - 1$ relatív prímelek, így minden i -re x vagy $x - 1$ osztható q_i -vel.

Mindezek alapján a $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számok száma 2^s .

3. feladat.

Adott $n \geq 10$ pont a síkon, nincs három egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet őket színezni pirossal és késsel úgy, hogy minden félsík, ami legalább 10 pontot tartalmaz, tartalmaz piros és kék pontot is.

Megoldás. 1. megoldás: Megmutatjuk, hogy az állítás 10 helyett 3-mal is teljesül. Természetesen elég a pontosan három pontot levágó félsíkokkal foglalkozni. Vegyük a konvex burok pontjainak egy olyan minimális részhalmazát, ami lefoglalja az összes, félsíkkal levágható ponthármas. (Világos, hogy minden ilyen ponthármas tartalmaz pontot a konvex burkon, tehát létezik ilyen halmaz.) Ezek a pontok legyenek pirosak, az összes többi kék. Most vágjunk le 3 pontot egy félsíkkal. Ezt a halmazt lefoglalja valamelyik piros pont, tehát piros van benne. Tegyük fel, hogy mind piros. Ekkor mindhárom a konvex burkon van. Viszont ekkor a középső nem kell az összes hármas lefogásához, ellentmondva a minimalitásnak. Tehát kék is van.

2. megoldás: Ez a megoldás 10 helyett 5-tel bizonyítja be az állítást. Sorszámozzuk meg a konvex burok pontjait körbe (1-essel kezdve). Színezzük ki a konvex burkot pirosra, a belső pontokat kékre. Ez majdnem jó, csak az olyan, félsíkkal levágható 5-ösökkel van gond, ami 5 egymás utáni konvex burok pontból áll, és nincs belső pont. Minden ilyenben vegyünk egy páros indexű pontot ami nem az első és nem az utolsó (az 5 közül). Ezeket a pontokat színezzük át kékre. Most vágjunk le 5 pontot egy félsíkkal. Ha csak konvex burok pontokat tartalmaz, akkor világos, hogy van benne kék, és páratlan indexű is, ami piros. Ha van belső pont is benne, akkor az nyilván kék. Ha legalább két konvex burok pontot tartalmaz, akkor a páratlan indexű piros. Ha csak egyet, akkor (4) belső pontot is tartalmaz, de ekkor ez a konvex burok pont nem lehetett 5 egymás utáni, belső pont nélkül levágható határpont nem első és nem utolsó pontja. Minden ilyen vágás tartalmazza azt a 4 belső pontot is. Tehát ez a pont piros.