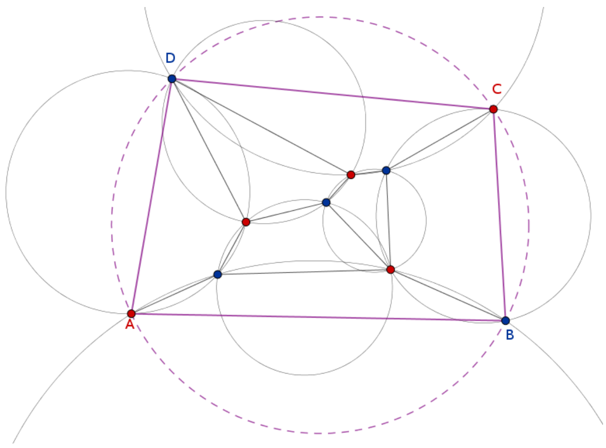
A 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak előzetes megoldásai

1. feladat. Az $ABCD$ négyszöget olyan húrnégyszögekre bontottuk fel, amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. A felbontásban szereplő húrnégyszögek csúcsai közül egy sem esik egy másik, felbontásbeli húrnégyszög oldalának vagy az $ABCD$ négyszög oldalának belsejébe. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ is húrnégyszög.

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az ábrában szereplő csúcsok és oldalak egy páros gráfot alkotnak. Ehhez elegendő azt igazolni, hogy a gráfban nincs páratlan kör.

Tekintsünk egy tetszőleges K kört a gráfban, amelyek h éle van. A K belsejét is négyszögekre osztottuk; ezek száma legyen n, a K belsejében futó élek száma e. Az n négyszögnek összesen $4n$ éle van, ebben a K éleit egyszer, a belső éleket kétszer számoltuk, tehát $4n = h + 2e$; látatjuk, hogy $h = 2(2n - e)$ páros.



A gráfunk tehát egy páros gráf; a négyszögek csúcsait kiszínezhetjük pirosra és kékre úgy, hogy a szomszédos csúcsok ellentétes színűek legyenek; legyen mondjuk A, C piros és B, D kék.

A belső piros pontok száma legyen p, a belső kék pontok száma k. Mindegyik csempében a piros és kék szögek összege ugyanannyi, ezért az összes piros és az összes kék csúcsú szög összege ugyanannyi. A piros és kék csúcsú szögeket a csúcsok szerint is összeszámolva,

$$BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle + p \cdot 360^\circ = CBA\sphericalangle + ADC\sphericalangle + k \cdot 360^\circ$$

$$BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle \equiv CBA\sphericalangle + ADC\sphericalangle \pmod{360^\circ}$$

A kongruencia mindkét oldalán a két szög összege 0 és $2 \cdot 360^\circ$ közé esik, ezért

$$BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle = CBA\sphericalangle + ADC\sphericalangle,$$

ami mutatja hogy $ABCD$ húrnégyszög.

2. feladat. Az ókori Egydimenziós Birodalom egy egyenes mentén helyezkedett el. Kezdetben nem voltak városok. Egyenként alapítottak összesen n különböző pontszerű várost; a másodiktól kezdve mindegyik újonnan alapított város és a hozzá legközelebbi, már létező város (ha két ilyen volt, akkor a régebbi) testvérvárossá nyilvánították egymást.

A birodalom fennmaradt térképén látszanak a városok és a köztük lévő távolságok, de alapításuk sorrendje nem. A történészek a térképből próbálnak arra következtetni, hogy mindegyik városnak legfeljebb 41 testvérvárosa volt.

(a) $n = 10^6$ esetén adjunk meg olyan térképet, amelyből ez a következtetés levonható.

(b) Igazoljuk, hogy $n = 10^{13}$ esetén ez a következtetés semmilyen térképből sem vonható le.

Megoldás.

a. Első megoldás. Ez a gondolatmenet 10^6 helyett tetszőleges $m \leq 2^{20}$ pont esetén is működik. Legyen $m \leq 2^{20}$. Vegyünk m pontot az egyenesen, egymástól egységnyi távolságra. Tegyük fel, hogy valamilyen számozás esetén a p_i pont legalább 42 szakasz végpontja. A szakaszok másik végpontjai (p_i szomszédai) közül az egyik a p_i-hez legközelebbi, kisebb indexű pont. A többi, legalább 41 szomszédhoz meg p_i a legközelebbi, kisebb indexű pont. Ezek közül p_i egyik oldalán található legalább 21. Legyenek ezek $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$, $m \geq 21$.

Ekkor, mivel mindegyiknek p_i volt a kisebb indexű legközelebbi szomszédja, a pontok sorrendje az egyenesen éppen $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}, p_i$, és minden $2 \leq j \leq m$-re $|p_i p_{i_j}| \leq |p_i p_{i_{j-1}}|/2$. Tehát $|p_i p_{i_2 1}| \leq |p_i p_{i_1}|/2^{20}$. De ez lehetetlen, mert $m \leq 2^{20}$ pontunk van, egyenletesen a számegyenesen, ezért a legnagyobb és legkisebb távolság aránya kisebb, mint m.

a. Második megoldás. Ez a gondolatmenet pedig 10^6 helyett tetszőleges $m \leq 2^{41}$ pont esetén is működik. Legyen $m \leq 2^{41}$. Legyen $0 \leq r \leq m$ tetszőleges. Írjuk fel r-t kettes számrendszerben, ez legfeljebb 41 jegyből áll. Ha szükséges tegyünk elé 0-kat úgy, hogy pontosan 41 jegyű legyen. Az r szám s-edik számjegye ($1 \leq s \leq 41$) ennek a felírásnak az s-edik számjegye, elölről számolva. Most tekintsük ezt a 41 hosszú $0-1$ sorozatot, mint egy 10-es számrendszerbeli szám. Ez a szám lesz p_r, ennek (10-es számrendszer szerinti) számjegyei megegyeznek r (kettes számrendszer szerinti) számjegyeivel. Legyen $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Tetszőleges $x, y \in P$, $x \neq y$ esetén legyen $d(x, y)$ értéke a legkisebb i, amelyre x és y i-edik számjegye eltér egymástól.

Most legyen $a \in P$ és rögzítsünk egy sorrendet. Tetszőleges $1 \leq i \leq 41$ esetén legyen

$$B_i = \{x \in P \mid d(x, a) = i\},$$
$$A_i = \{x \in P \mid d(x, a) > i\}.$$

Világos, hogy $P = \{a\} \cup \bigcup_{i=1}^{41} B_i$ és $a \in A_i$ minden i-re. Vegyük észre, hogy tetszőleges sorrend esetén A_i és B_i között legfeljebb egy él lehet, hiszen ha már van egy $a'b'$ él ($a' \in A_i$, $b' \in B_i$) akkor A_i minden pontjához a' közelebb van, mint B_i bármely pontja, és fordítva, B_i minden pontjához b' közelebb van, mint A_i bármely pontja. Ebből pedig következik az állítás, hiszen ekkor a-nak legfeljebb egy szomszédja lehet a $B_1, B_2, \ldots, B_{41}$ halmazok mindegyikében.

b. Legyen P egy tetszőleges, 10^{13} elemű számozatlan ponthalmaz. Először definiáljuk a $P \supset P_0 \supset \cdots \supset P_{42}$ részhalmazokat és a $q_i \in P_i$ pontokat. Legyen P_0 P egy tetszőleges, $2^{42} + 1$ elemű részhalmaza, és legyen q_0 ennek az egyik szélső pontja. Definiáljuk a többi pontot és részhalmazt rekurzivan. Tegyük fel, hogy $i < 42$, $|P_i| = 2^{42-i} + 1$ és q_i P_i egyik szélső pontja. Legyen q_{i+1} P_i középső pontja. Ekkor q_{i+1} P_i-t két $2^{43-i} + 1$ pontú részhalmazra bontja (q_{i+1}-et mindkét részbe beleszámítva). Legyen P_{i+1} az, amelyiknek kisebb az átmérője, vagyis a két szélső pontjának a távolsága. Egyenlőség esetén bármelyik lehet.

Ezután legyen a pontok sorrendje a következő: $q_{42}, q_0, q_1, \ldots, q_{41}$, majd a többi pont tetszőleges sorrendben. Vagyis legyen $p_1 = q_{42}$, $2 \leq i \leq 43$ esetén legyen $p_i = q_{i-2}$, majd a többi pont tetszőleges sorrendben.

Azt állítjuk, hogy $q_{42} = p_1$ össze lesz kötve a $q_0 = p_2, q_1 = p_3, \ldots, q_{41} = p_{43}$ pontokkal. Legyen $0 \leq j < i \leq 41$. Mivel $|q_i q_{42}| < |q_i q_{i-1}| \leq |q_i q_j|$, vagyis $|p_{i+2} p_1| < |p_{i+2} p_{j+2}|$ ezért minden $2 \leq i \leq 43$ esetén a p_i-hez legközelebbi pont a p_1 az i-nél kisebb indexű pontok közül. Vagyis p_1 legalább 42 szakasz végpontja.

3. feladat.

Legyen p prímszám és $H \subseteq \{0, 1, \ldots, p-1\}$ nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy minden $a \in H$ elemhez találhatók olyan, a-tól különböző $b \in H$ és $c \in H$ elemek, amelyekre $b + c - 2a$ osztható p-vel. Mutassuk meg, hogy $p < 4^k$, ahol k a H halmaz elemeinek számát jelöli.

1. megoldás. A továbbiakban minden művelet modulo p értendő, valamint a maradékokat mindig a $(-p/2, p/2)$ intervallumból választjuk.

Ha egy feladatbeli H halmazt eltolunk (azaz minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a maradékot), akkor H továbbra is rendelkezik a megadott tulajdonsággal, így feltehető, hogy $0 \in H$. Továbbá meg is szorozhatjuk minden elemét egy nemnulla r maradékkal. Azt állítjuk, hogy ha $p > 4^{k-1}$, akkor ily módon elérhető, hogy H összes eleme a $(-p/4, p/4)$ intervallumba essen. Valóban, osszuk fel a $(-p/2, p/2)$ intervallumot négy egyenlő részre, és nézzük meg, hogy a $k-1$ nemnulla elem mely részekbe esik, ha különböző r maradékokkal szorozzuk meg őket. A skatulya elv szerint lennie kell különböző $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, 4^{k-1}\}$ számoknak úgy, hogy a velük való szorzásnál minden $0 \neq a \in H$ elemre fennáll, hogy $r_1 a$ és $r_2 a$ azonos részbe esik. Ekkor viszont könnyen látható, hogy az $r = r_2 - r_1 \neq 0$ számmal szorozva a halmaz minden eleme a $(-p/4, p/4)$ intervallumba esik. Ez pedig ellentmondás, mert akkor H legnagyobb eleméhez biztosan nem tudunk megfelelő b, c elemeket találni.

2. megoldás. Egy p prímszámra vegyük a legkisebb k-t, melyre létezik a feladatbeli $H = \{a_1, \ldots, a_k\}$ halmaz. Belátjuk, hogy erre a k-ra $p \leq 4^{k-1}$, sőt, $p \leq \left(\sqrt{6}\right)^{k-1}$.

Tetszőleges ℓ indexhez léteznek különböző i, j indexek úgy, hogy $2a_\ell = a_i + a_j$. Vagyis a megfelelő $2x_\ell - x_i - x_j = 0$ egyenletekből álló rendszernek van páronként különböző maradékokból álló megoldása modulo p. Ehhez a lineáris egyenletrendszerhez egy olyan $k \times k$-as A mátrix tartozik, amelynek minden sorában három nemnulla elem van: egy 2-es és két -1-es. Azt is tudjuk, hogy az egyenletrendszernek $\mathbb{R}$ felett csak olyan megoldásai vannak, ahol $x_1 = \ldots = x_k$. (Valóban, jelölje x az x_i-k maximumát, és legyen L azon ℓ indexek halmaza, melyre $x_\ell = x$. Világos, hogy minden $\ell \in L$-hez tartozó i, j indexekre is szükségképpen $x_i = x_j = x$, azaz $i, j \in L$. Így az a_ℓ, $\ell \in L$, elemekből álló halmaz is rendelkezik a feladatbeli tulajdonsággal, ami k minimalitása miatt azt jelenti, hogy $L = \{1, \ldots, k\}$, vagyis $x_\ell = x$ minden ℓ-re, ahogy állítottuk.) Lineáris algebrából tudjuk, hogy ekkor az A mátrix rangja $k-1$, következésképp van nemnulla $(k-1) \times (k-1)$-es aldeterminánsa. Ez az aldetermináns egy nemnulla egész szám, aminek az abszolút értéke a triviális becslés szerint legfeljebb $(2+1+1)^{k-1} = 4^{k-1}$. Tudjuk viszont, hogy az $\mathbb{F}_p$ test felett van nemkonstans megoldás is, tehát ott a rang legfeljebb $k-2$, azaz ennek az aldeterminánsnak oszthatónak kell lennie p-vel, ami csak úgy lehetséges, ha $p \leq 4^{k-1}$.

Megjegyezzük, hogy a mátrixok determinánsára vonatkozó *Hadamard-egyenlőtlenség*ből valamivel jobb becslést is kaphatunk: $\left(\sqrt{6}\right)^{k-1}$.