A 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. feladat. Legyen $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, ahol $d \geq 1$, az $a_0, \ldots, a_d$ együtthatók nemnegatív egészek, $a_d > 0$. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám van, amelyre $f(n)$ az $f(2), f(3), \ldots, f(n-1)$ számok egyikével sem osztható.

A megoldás során az alábbi segédtételt is felhasználjuk.

Lemma. Ha $f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ egész együtthatós polinom és $n \equiv k \mod m$, akkor $f(n) \equiv f(k) \mod m$.

A Lemma bizonyítása. Az ismert azonosság szerint

$$n^i - k^i = (n-k)(n^{i-1} + n^{i-2}k + \ldots + nk^{i-2} + k^{i-1}) \ ,$$

ezért ha n és k egészek, akkor $n - k \mid n^i - k^i$ teljesül minden pozitív egész i-re. Következésképp $n - k \mid \sum_{i=0}^{d} a_i(n^i - k^i) = f(n) - f(k)$. Ha tehát $m \mid n - k$ akkor $m \mid f(n) - f(k)$ is fennáll, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. $\square$

Az 1. feladat megoldása.

Nevezzük a $p \geq 2$ egész számot f-prímnek, ha nincs olyan $2 \leq k < p$ egész szám, amelyre $f(k)|f(p)$. Például $p = 2$ triviálisan f-prím. Azt kell bizonyítanunk, hogy végtelen sok f-prím létezik. Ezt a végtelen sok prím létezésére vonatkozó, Euklidész-féle bizonyítás mintájára tehetjük meg.

Ha $n \geq 2$ egész, akkor van olyan p f-prím, amelyre $f(p)|f(n)$. Ha ugyanis az n szám f-prím, akkor $p = n$ megfelelő. Ha n nem f-prím, akkor van olyan $2 \leq k < n$, amelyre $f(k)|f(n)$. Ha p a legkisebb ilyen tulajdonságú k szám, akkor p olyan f-prím, amelyre $f(p)|f(n)$.

Elég megmutatni, hogy tetszőleges $p_1, \ldots, p_r$ f-prímek esetén létezik tőlük különböző f-prím. Legyen $n = 1 + \prod_{i=1}^{r} f(p_i)$ és p_j az imént felsorolt f-prímek bármelyike. Ekkor $n \equiv 1 \mod f(p_j)$, ezért a fenti Lemma miatt $f(n) \equiv f(1) \mod f(p_j)$. Mivel az f polinom az $x \geq 0$ félegyenesen szigorúan monoton növekedő, ezért $0 < a_d \leq \sum_{i=0}^{d} a_i = f(1) < f(p_j)$, tehát $f(1) \not\equiv 0 \mod f(p_j)$ s így $f(p_j) \nmid f(n)$. Láttuk, hogy van olyan p f-prím, amelyre $f(p)|f(n)$. A legutolsó megállapításunk miatt ekkor p különbözik a $p_1, \ldots, p_r$ f-prímek mindegyikétől. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Holló Martin és Németh Márton másik utat talált a megoldáshoz, mégpedig a polinom egész helyeken felvett értékei legnagyobb közös osztójának segítségével. Az itt közölt gondolatmenet a számelmélet alaptétele mellett azt is felhasználja, hogy a prímek száma végtelen. A módszerrel a feladat állításának alábbi általánosítása is igazolható.

Állítás. Tegyük fel, hogy $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ egész együtthatós polinom, és K olyan küszöb, hogy $n > K$ esetén $f(n) \neq \pm D$, ahol D az $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója. Ekkor végtelen sok olyan $n > K$ egész szám létezik, amire $f(n)$ nem osztható az $f(K+1), f(K+2), \ldots, f(n-1)$ helyettesítési értékek egyikével sem.

Világos, hogy a versenyen kitűzött feladatban szereplő f polinomra $D \leq f(1) < f(2) < \ldots$ miatt $K = 1$ választás mellett fennállnak a fenti állításban megkívánt feltevések.

Bizonyítás. Tetszőleges i pozitív egészre jelölje p_i a prímek $2, 3, 5, 7, \ldots$ sorozatának i-edik elemét, és legyen D kanonikus alakjában a p_i prím kitevője h_i. (Tehát ha $p_i \nmid D$, akkor $h_i = 0$.) A D definíciója miatt minden pozitív egész i-hez van olyan n_i egész szám, amire $p_i^{h_i+1} \nmid f(n_i)$.

A kínai maradéktétel szerint minden pozitív egész j-re van olyan k_j egész szám, amire minden $i \leq j$ esetén $k_j \equiv n_i \mod p_i^{h_i+1}$ áll. Sőt: az ilyen tulajdonságú egész számok egyetlen maradékosztályt alkotnak modulo $p_1^{h_1+1} \cdot p_2^{h_2+1} \cdot \ldots \cdot p_j^{h_j+1}$. Az imént definiált k_j tehát választható K-nál nagyobbnak.

A fenti Lemma miatt $f(k_j) \equiv f(n_i) \mod p_i^{h_i+1}$, így $p_i^{h_i+1} \nmid f(k_j)$ minden $1 \leq i \leq j$ egészre. Jelölje q_j a legkisebb olyan K-nál nagyobb egész számot, amire $p_i^{h_i+1} \nmid f(q_j)$ teljesül minden $1 \leq i \leq j$ egészre. Mivel k_j rendelkezik a q_j-től elvárt oszthatósági tulajdonsággal, ezért q_j jóldefiniált.

Legyen n egy K és q_j közötti egész szám. A D definíciója és a K választása miatt $f(n) = r \cdot D$, ahol $|r| \neq 1$. Ha r-nek nem volna a $p_1, \ldots, p_j$ prímek között osztója, akkor az ellentmondana q_j választásának. Van tehát olyan $1 \leq i \leq j$, amire $p_i \mid r$, azaz amire $p_i^{h_i+1} \mid f(n)$. Mivel $p_i^{h_i+1} \nmid f(q_j)$, ezért minden $K < n < q_j$ esetén $f(n) \nmid f(q_i)$ teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy a $q_1, q_2, \ldots$ számok mindegyike rendelkezik az Állításban elvárt tulajdonsággal.

A bizonyítás befejezéséhez már csak azt kell megmutatni, hogy a $\{q_1, q_2, \ldots\}$ halmaz végtelen. Ennek érdekében azt igazoljuk, hogy bármely N egészhez található olyan q_j, amire $|f(q_j)| > N$. Ekkor ugyanis az $f(q_j)$ értékek végtelen sokfélék lesznek, így a q_j-k is végtelen sokan vannak. Figyeljük meg, hogy q_j választása, $D \mid f(q_j)$ és $D < |f(q_j)|$ miatt $f(q_j)$-nek van p_j-nél nagyobb prímosztója. Ha tehát $p_j > N$, akkor $|f(q_j)| \geq p_j > N$, nekünk pedig pontosan erre van szükségünk a bizonyítás befejezéséhez. $\square$

2. feladat. Legyen n pozitív egész szám. Nevezzük *csúcs*nak a síkbeli derékszögű koordinátarendszer azon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátája az 1, 2, ..., n számok közül kerül ki. Nevezzük *él*nek azon egységnyi hosszúságú szakaszokat, amelyeknek mindkét végpontja csúcs. Néhány élt pirosra színeztünk úgy, hogy bármely két különböző csúcs között pontosan egy piros töröttvonal vezessen. Az f piros él *fontos* az e él számára, ha az e két végpontját összekötő piros töröttvonal áthalad f-en. Bizonyítandó, hogy van olyan piros él, amely legalább n él számára fontos.

Megjegyzés. Az alább közölt megoldások során az $n > 1$ feltevéssel élünk, ugyanis a feladatban szereplő állítás $n = 1$ esetén nem igaz. Sajnos a feladat pontatlanul lett kitűzve.

I. megoldás a 2. feladatra. Tekintsük az $A = (1, 1)$, $B = (n, 1)$, $C = (n, n)$ és $D = (1, n)$ csúcsokhoz a piros élekből álló AC és BD töröttvonalakat. Mivel B és D a piros AC töröttvonal két ellentétes oldalára esik, ezért a piros AC és BD töröttvonalaknak találkozniuk kell, így bizonyosan van legalább egy közös csúcsuk. Ha P és Q ilyen közös csúcsok, akkor a piros AC és a BD töröttvonalak mindegyike tartalmaz egy piros PQ töröttvonalat is. A piros PQ töröttvonal egyértelműségéből az következik, hogy a piros AC ill. BD töröttvonalak mindegyike ugyanazt a piros PQ töröttvonalat tartalmazza. Ez pedig azt jelenti, hogy a piros AC és BD töröttvonalak metszete egyetlenegy piros töröttvonal, ami — mondjuk — egy X és egy Y csúcsot köt össze.

Ha $X \neq Y$, akkor legyen f a piros XY töröttvonal egy éle. Azt állítjuk, hogy f legalább n él számára fontos.

Ha egy csúcsból A-ba és C-be is vezetne f-et nem tartalmazó töröttvonal, akkor A es C között is lenne f-et nem tartalmazó töröttvonal, ami lehetetlen. Hasonlóan, ha egy csúcsból az A-ba és C-be vezető töröttvonal is tartalmazná f-et, akkor is lenne A és C között f-et nem tartalmazó töröttvonal. Tehát minden csúcsból az A-ba és C-be vezető egyértelmű töröttvonalak egyike tartalmazza f-et, a másik nem.

Színezzük kékre azokat a csúcsokat, ahonnan A-ba, és sárgára pedig azokat a csúcsokat, ahonnan C-be vezet f-et nem tartalmazó piros töröttvonal.

Vegyük észre, hogy ha egy e él egyik végpontja kék, a másik pedig sárga, akkor e számára fontos az f él, ugyanis ellenkező esetben vezetne A és C között az f élt elkerülő piros töröttvonal.

Ha a most definiált színezésben B és D csúcsok azonos színűek lennének, akkor mindkét csúcsból vezetne egy-egy f élt elkerülő piros töröttvonal vagy az A vagy a C csúcsba, ezért vezetne B és D között is egy f élt nem használó piros töröttvonal. Tudjuk azonban, hogy az f él rajta van a B-t D-vel összekötő egyetlen piros töröttvonalon, ezért a B és D csúcsok közül az egyik kék, a másik pedig sárga.

Ha B kék, akkor van egy f-et elkerülő piros AB töröttvonal, és ezért az $(i, 1)$ csúcs kék minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Hasonlóan, az f-et elkerülő piros CD töröttvonal miatt az (i, n) csúcs minden $1 \leq i \leq n$ esetén sárga. Ezért minden ilyen i-re van olyan $1 \leq j < n$, amire az (i, j) csúcs kék, az $(i, j + 1)$ csúcs pedig sárga. Láttuk, hogy az e két csúcsot összekötő él számára az f él fontos. Mivel $1 \leq i \leq n$ tetszőleges lehet, találtunk n olyan élt, ami számára az f él fontos.

Hasonlóan, ha B sárga és D kék, akkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén a $(1, i)$ csúcs kék és az (n, i) csúcs pedig sárga. Így aztán minden $1 \leq i \leq n$ esetén van olyan $1 \leq j < n$, amire a (j, i) csúcs kék, a $(j + 1, i)$ csúcs pedig sárga. Ezért az ezen csúcsokat összekötő él számára az f él fontos, és mivel az i-t n-féleképp választhatjuk, ismét találtunk n olyan élt, ami számára f fontos.

Végül az $X = Y = (a, b)$ eset marad. Az ábra esetleges elforgatásával elérhető, hogy $a \geq \frac{n+1}{2}$ és $b \geq \frac{n+1}{2}$ legyen. Mi annyit fogunk ebből használni, hogy $a + b \geq n + 1$. Legyen f az XA piros töröttvonal első (X-re illeszkedő) éle, és legyen $X' = (a', b')$ az f él X-től különböző végpontja.

Világos, hogy $a' + b' \geq a + b - 1 \geq n + 1 - 1 = n$.

Színezzük kékre most azokat a csúcsokat, amelyekből található A-ba piros élekből álló, f-et nem tartalmazó töröttvonal, és legyen minden más csúcs sárga. Ekkor minden $1 \leq i \leq a'$ esetén az $x = i$ egyenes kék csúcsban metszi az $X'A$ piros töröttvonalat és sárga csúcsban metszi az XD piros töröttvonalat. Ezért az $x = i$ egyenesen van olyan függőleges él, aminek az egyik csúcsa kék, a másik pedig sárga. Láttuk, hogy ezen élek mindegyike számára fontos az f él. Hasonlóan, minden $1 \leq j \leq b'$ esetén az $y = j$ egyenes kék csúcsban metszi az $X'A$ piros töröttvonalat és sárga csúcsban metszi az XB piros töröttvonalat. Ezért az $y = j$ egyenesen van olyan vízszintes él, aminek az egyik csúcsa kék, a másik pedig sárga. és persze minden ilyen él számára is fontos az f él. Azt kaptuk, hogy az f él legalább a' függőleges és legalább b' vízszintes él számára fontos. A feladatbeli állítás korábban látott $a' + b' \geq n$ megfigyelésből közvetlenül adódik. □

"II. megoldás a 2. feladatra" A gráfelméletben használt terminológiát segítségül hívva bemutatunk egy másik lehetséges bizonyítást is. Legyen G a feladatban definiált csúcsok és élek alkotta gráf. Világos, hogy a piros élek a G gráf egy F feszítőfáját határozzák meg, továbbá, hogy az F fa egy f éle a G gráf e éle számára akkor fontos, ha e végpontjai az $F - f$ különböző komponenseibe esnek.

Irányítsuk F minden e élét úgy, hogy e az $F - e$ több csúcsot tartalmazó komponense felé mutasson; ha $F - e$ mindkét komponense pontosan $\frac{n^2}{2}$ csúcsot tartalmaz, akkor e-t nem irányítjuk. Tekintsük F egy tetszőleges v csúcsát, és induljunk el v-ből az imént irányított élek irányítását követve. Mivel F körmentes, ezért ilyen módon nem juthatunk el olyan csúcsba, ahol korábban már jártunk. A $V(F)$ csúcshalmaz végessége folytán előbb-utóbb tehát olyan u csúcsba érkezünk, ahonnan nem tudunk tovább lépni, azaz u-ból nem lép ki irányított él. Az u csúcsra illeszkedő legfeljebb 4 él mindegyikénél vizsgáljuk meg, hogy az adott él elhagyása után hány csúcsa van az u-t nem tartalmazó komponensnek. A kapott értékek összege az F fa u-tól különböző csúcsainak száma, azaz $n^2 - 1$. A skatulya-elv miatt illeszkedik tehát u-ra olyan f él, amire az $F - f$ gráf u-t nem tartalmazó komponense legalább $\frac{n^2-1}{4}$ csúcsot tartalmaz. Ráadásul $(F - f)$-nek az u-t tartalmazó komponense legalább $\frac{n^2}{2}$ csúcsú, mivel az f él vagy u-ba van irányítva vagy irányítatlan. Az így konstruált f élről a továbbiakban csupán annyit fogunk felhasználni, hogy $F - f$ mindkét komponensének legalább $\frac{n^2-1}{4}$ csúcsa van.

Színezzük zöldre a $G - f$ gráf egyik komponensének, fehérre pedig a másik komponensének a csúcsait. A célunk annak igazolása, hogy G-nek legalább n olyan éle van, ami zöld csúcsot fehér csúccsal köt össze.

Vizsgáljuk meg, hogy a zöld illetve fehér csúcsok első és második koordinátái hányfélék lehetnek. Figyeljük meg, hogy ha nincs olyan zöld csúcs, aminek az első koordinátája j, akkor minden olyan csúcs fehér, aminek j az első koordinátája, és ezért a fehér csúcsok második koordinátái minden lehetséges 1 és n közötti értéket felvesznek. Ha tehát a zöld csúcsok második koordinátái n-féle értéket vehetnek fel, de az első koordinátáik nem lehetnek n-félék, akkor a fehér csúcsok második koordinátái szintén n-félék lehetnek. Ebből az következik, hogy a csúcsok által meghatározott minden vízszintes egyenes tartalmaz zöld és fehér csúcsot összekötő élt. Az így kapott n él mindegyike számára fontos az f él.

Hasonló módon fejezhető be a bizonyítás, ha a zöld és fehér színek valamelyikére igaz, hogy az ezen színre színezett csúcsok egyik koordinátája n-féle lehet, a másik pedig n-nél kevesebb értéket vehet fel. Ha pedig ez a tulajdonság a két szín egyikére sem teljesül, akkor van olyan szín (mondjuk a fehér), hogy a fehérre színezett csúcsok első és második koordinátái is n-félék lehetnek. Tegyük fel, hogy ekkor a zöld csúcsok első koordinátái k-félék, a másodikak pedig ℓ-félék lehetnek. A zöld csúcsok száma ekkor legfeljebb $k \cdot \ell$. A zöld és fehér csúcsokat összekötő élek között van legalább k függőleges és legalább ℓ vízszintes, hiszen minden zöld csúcsra illeszkedő vízszintes és függőleges egyenesen kell lennie ilyen élnek. A számtani és mértani közép közti összefüggés és a zöld csúcsok számáról tett korábbi megfigyelés miatt

$$\frac{n^2-1}{4} \le k \cdot \ell \le \left(\frac{k+\ell}{2}\right)^2 ,$$

ahonnan $k+\ell \ge \sqrt{n^2-1} > \sqrt{n^2-2n+1} = n-1$ adódik. Innen $k+\ell \ge n$, így a zöld és fehér csúcsot összekötő élek száma ebben az esetben sem lehet n-nél kevesebb. $\square$

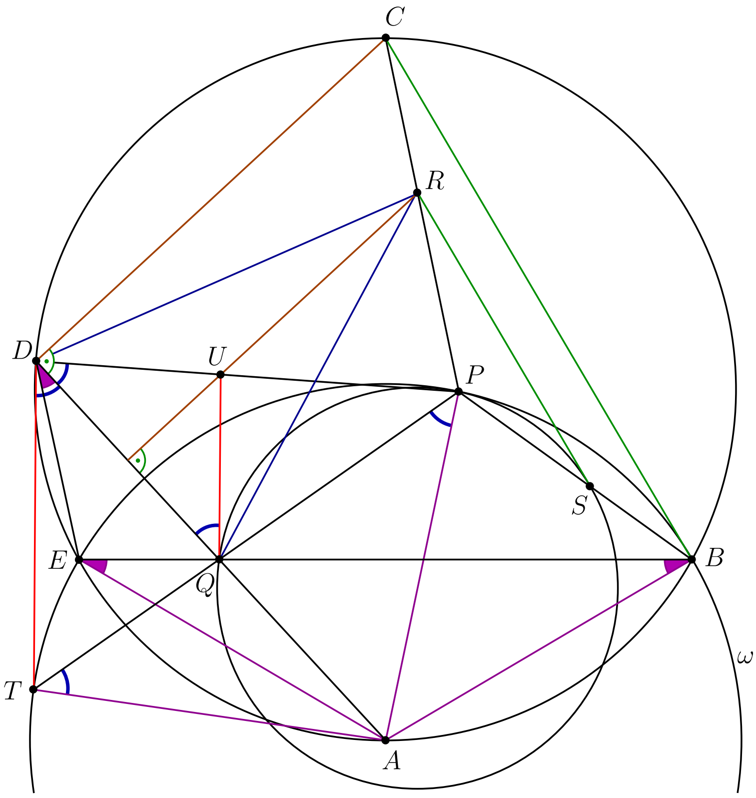
Megjegyzés. A 2. feladat állítása nem élesíthető abban az értelemben, hogy nem biztos, hogy olyan piros él is van, ami $n+1$ él számára fontos. Ha például $n = 2k-1$ páratlan, és a piros élek halmaza $P_v \cup P_f$, ahol

$$\begin{aligned} P_v &= \{(x,y)(x+1,y) : 0 < x < k, 1 < y \le k\} \\ &\cup \{(x,y)(x+1,y) : k \le x < 2k-1, k \le y < 2k-1\} \\ P_f &= \{(x,y)(x,y+1) : 1 < x \le k \le y < 2k-1\} \\ &\cup \{(x,y)(x,y+1) : 0 < y < k \le x < 2k-1\} \end{aligned}$$

akkor a (k,k) csúcsra illeszkedő 4 piros él pontosan n él számára, minden más piros él pedig n-nél kevesebb él számára fontos. Ha $n = 2k$ páros, akkor ennek a konstrukciónak alkalmas módosításával megadható az élek olyan pirosra színezése, amelyik mindössze három olyan piros élt tartalmaz, ami n él számára fontos.

3. feladat. Adott egy $ABCDE$ konvex húrötszög és egy belső P pontja úgy, hogy $AB = AE = AP$ és $BC = CE$. Az AD és BE egyenesek metszéspontja Q. Az R és S pontok a CP, illetve a BP szakaszokon fekszenek úgy, hogy $DR = QR$ és $SR \parallel BC$. Mutassuk meg, hogy a BEP és PQS körök érintik egymást.

A 3. feladat megoldása. Jelölje ω a BPE háromszög köré írt kört; az $AB = AE = AP$ feltétel miatt ennek középpontja az A pont. Legyen T az ω és a PQ egyenes második, P-től különböző metszéspontja, továbbá legyen U a QD szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja a PD egyenessel. Mivel $DR = QR$, a QD szakasz felezőmerőlegese az R ponton is átmegy. A Thalész-tétel miatt $CD \perp AD$, így CD és UR is merőleges AD-re, tehát $CD \parallel RU$.



Azt állítjuk, hogy a TD és QU egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az AQD egyenes nem megy át a P ponton. Vegyük észre, hogy az AEQ és ADE háromszögek hasonlók és ellentétes irányításúak, mert $AEQ\sphericalangle = AEB\sphericalangle = EBA\sphericalangle = EDA\sphericalangle$, és így $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AQ}{AE}$. Mivel $AE = AP = AT$, az is igaz, hogy $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{AQ}{AP}$ és $\dfrac{AT}{AD} = \dfrac{AQ}{AT}$, ami miatt az ADP és az APQ háromszögek is hasonlók és ellentétes irányításúak, illetve az ADT és az ATQ háromszögek is hasonlók és ellentétes irányításúak. Továbbá az APT és DQU háromszögek egyenlő szárúak, így

$$TDQ\sphericalangle = TDA\sphericalangle = ATQ\sphericalangle = ATP\sphericalangle = TPA\sphericalangle = QPA\sphericalangle = ADP\sphericalangle = QDU\sphericalangle = UQD\sphericalangle,$$

és ezeknek a szögeknek az irányítása is megegyezik. A DT és a QU egyenesek tehát ugyanakkora irányított szöget zárnak be a DQ szakasszal, vagyis párhuzamosak.

Ha az AQD egyenes átmegy a P ponton, akkor ez az egyenes tartalmazza a T és U pontokat is, emiatt a TD és QU egyenesek egybeesnek. Ezzel tehát igazoltuk, hogy TD és QU párhuzamosak vagy egybeesnek.

Végül, a párhuzamos szelők tételét háromszor alkalmazva,

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{PU}{PD} = \frac{PR}{PC} = \frac{PS}{PB}.$$

Ebből következik, hogy a PQS kör az ω kör P középpontú nagyítása, tehát a közös P pontban érintik egymást. □

Megjegyzések. 1. Két versenyző is megtalálta a T pontot és az $APDT$ kört, de — talán a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt — nem tudták befejezni a megoldást.

2. Több versenyző is a mozgópont-módszer alkalmazásával próbálta megoldani a feladatot, ez azonban csak egyiküknek sikerült. A mozgópont-módszer segítségével geometriai illeszkedéseket lehet igazolni. A módszer szóbanforgó változatánál az ábrát meghatározó egyik pontot úgy mozgatjuk a síkon, hogy mindkét koordinátája az időnek racionális törtfüggvénye legyen. Ennek a pontnak a mozgásából meghatározható, hogy hogyan mozog az adott konfiguráció többi pontja, illetve vonala, és mindegyiket (így az illeszkedőnek gondoltakat is) racionális törtfüggvények segítségével lehet felírni. A bizonyítandó illeszkedés végül úgy fogalmazható meg, hogy egy bizonyos egyváltozós polinom azonosan nulla. Ha e polinom fokszámát ügyesen megbecsüljük, akkor — mivel n-edfokú polinomnak csak n gyöke lehet — azt kapjuk, hogy a bizonyítandó illeszkedést elég a mozgó pontnak csak véges sok (a szóban forgó polinom becsült fokszámánál 1-gyel több), akár elfajuló esetére ellenőrizni. Ha ezt megtesszük, akkor ezzel igazoljuk, hogy a mozgó pont minden helyzetében fennáll a bizonyítandó illeszkedés, és ezzel a bizonyítást befejeztük. Hangsúlyozzuk, hogy bár a mozgópont-módszer rendkívül hatékony eszköz az illeszkedés típusú összefüggések bizonyítására, általában nem ad olyan geometriai megértést, mint egy szintetikus bizonyítás (pl. a fenti), hanem ezt algebrai megértéssel helyettesíti.

A 3. feladat egy lehetséges mozgópontos megoldásának vázlata (Molnár-Szabó Vilmos dolgozata alapján):

Legyen O a PQS kör középpontja; azt kell igazolnunk, hogy O az AP egyenesen van.

Az A, B, C, E, P pontokat rögzítjük. A Q pontot és vele együtt a D, R és S pontokat mozgatjuk. A Q pont elsőfokú, és megmutatható, hogy D, R, S legfeljebb másodfokúak, O pedig legfeljebb negyedfokú. Így az, hogy $O \in AP$, egy legfeljebb negyedfokú polinom eltűnésével ekvivalens. Végül ezt abban az öt esetben ellenőrizzük, amikor $D = A$, $D = B$, $D = E$, illetve amikor D valamelyik „abszolút pont” (azaz $(1, \pm i)$ irányú komplex végtelen távoli pont).

Problems of the 2023 Kürschák competition

1. Let $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, where $d \geq 1$, the coefficients $a_0, \ldots, a_d$ are nonnegative integers, and $a_d > 0$. Show that there exist infinitely many positive integers n such that $f(n)$ is not divisible by any of the numbers $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(n-1)$.
2. Let n be a positive integer. We call a point (x, y) of the Euclidean plane a *vertex* if $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Furthermore, we call a unit segment connecting two vertices an *edge*. Suppose that we color some edges to red in such a way that for any two distinct vertices there exists a unique red broken line connecting them. We say that the red edge f is *important* to the edge e if the red broken line connecting the endpoints of e contains f. Prove that there exists a red edge which is important to at least n edges.
3. Suppose that for an inner point P of the cyclic pentagon $ABCDE$ we have $AB = AE = AP$ and $BC = CE$. Let the lines AD and BE meet at Q. Furthermore, the points R and S lie on the segments CP and BP, respectively, such that $DR = QR$ and $SR \parallel BC$. Show that the circles BEP and PQS are tangent to each other.