

# A 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatai

1. Legyen  $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ , ahol  $d \geq 1$ , az  $a_0, \dots, a_d$  együtthatók nemnegatív egészek,  $a_d > 0$ . Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan  $n$  pozitív egész szám van, amelyre  $f(n)$  az  $f(2), f(3), \dots, f(n-1)$  számok egyikével sem osztható.
2. Legyen  $n$  pozitív egész szám. Nevezzük *csúcsnak* a síkbeli derékszögű koordináta-rendszer azon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátája az  $1, 2, \dots, n$  számok közül kerül ki. Nevezzük *élnek* azon egységnyi hosszúságú szakaszokat, amelyeknek mindkét végpontja csúcs. Néhány élt pirosra színeztünk úgy, hogy bármely két különböző csúcs között pontosan egy piros töröttvonal vezessen. Az  $f$  piros él *fontos* az  $e$  él számára, ha az  $e$  két végpontját összekötő piros töröttvonal áthalad  $f$ -en. Bizonyítandó, hogy van olyan piros él, amely legalább  $n$  él számára fontos.
3. Adott egy  $ABCDE$  konvex húrötszög és egy belső  $P$  pontja úgy, hogy  $AB = AE = AP$  és  $BC = CE$ . Az  $AD$  és  $BE$  egyenesek metszéspontja  $Q$ . Az  $R$  és  $S$  pontok a  $CP$ , illetve a  $BP$  szakaszokon fekszenek úgy, hogy  $DR = QR$  és  $SR \parallel BC$ . Mutassuk meg, hogy a  $BEP$  és  $PQS$  háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Tudnivalók a hátoldalon.

## Versenyfeltételek és tudnivalók

A Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen versenyzőként az érettségivel nem rendelkező középiskolai tanulók és a 2023-ban középiskolai tanulóként érettségizettek vehetnek részt. A versenyzőknek kérésre igazolniuk kell, hogy teljesül rájuk ez a részvételi feltétel.

A feladatok kidolgozására 4 óra fordítható. Ezalatt tilos a versenyzők együttműködése, és a résztvevők nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt.

Minden versenyző helyesen és jól olvashatóan tüntesse fel a nevét a dolgozat minden lapján. Aki több lapon dolgozik, számozza meg a lapokat. Kérjük a versenyzőket, hogy a különböző feladatok megoldását külön lapokra írják, és egyértelmű áthúzással jelezzék dolgozatukban a hibásnak ítélt részeket. A versenydolgozat beadása nem kötelező.

A verseny díjazottjait a regisztráció során megadott e-mail címen értesítjük. Egyúttal az eredményhirdetésre behívottak listáját a <https://www.bolyai.hu/versenyek-kurschak-jozsef-matematikai-tanuloverseny/> weblapon tesszük közzé. A későbbiekben a verseny eredményhirdetéséről is ugyanitt lehet tájékozódni.

Jó munkát kíván

a versenybizottság