Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2022

Versenyfeltételek és tudnivalók

A Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen versenyzőként a nem érettségizett, középiskolai tanulók, illetve a 2022-ben érettségizettek vehetnek részt. A versenyzőknek kérésre igazolniuk kell, hogy teljesül rájuk a részvételi feltétel. A feladatok kidolgozására 4 óra fordítható. Ezalatt tilos a versenyzők együttműködése, és a résztvevők nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt.

Minden versenyző helyesen és jól olvashatóan tüntesse fel a nevét a dolgozat minden lapján. Aki több lapon dolgozik, számozza meg az oldalakat. Kérjük a versenyzőket, hogy a különböző feladatok megoldását külön lapokra írják, a lapok hátoldalát hagyják üresen és egyértelmű áthúzással jelezzék dolgozatukban a hibásnak ítélt részeket. A versenydolgozat beadása nem kötelező.

A dolgozatok beadása előtt lehetőség szerint kérjük a dolgozatok CamScanner-rel (vagy más telefonos applikációval) való scannelését, és dropbox-linken keresztüli beküldését PDF formátumban.

A verseny díjazottjait a regisztráció során megadott e-mail címen értesítjük, és ezzel egyidejűleg a `https://www.bolyai.hu/versenyek-kurschak-jozsef-matematikai-tanuloverseny/` weblapon közzétesszük az eredményhirdetésre behívottak listáját. A verseny eredményhirdetéséről később teszünk közzé információt.

Jó munkát kíván *a versenybizottság*

A 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatai

1. feladat. Egy négyzetet felbontottunk 2022 téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?

2. feladat. Tegyük fel, hogy a 4-gyel osztva 3 maradékot adó p, q prímszámokra az $x^2 - pqy^2 = 1$ egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a $|px^2 - qy^2| = 1$ egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.

3. feladat. Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ valós számokra $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ minden i, j esetén (speciálisan $a_{i,i} = 0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?