A 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak előzetes megoldásai

1. feladat. Egy négyzetet felbontottunk 2022 téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?

Megoldás: A négyzetet $n-1$ darab, az egyik oldalával párhuzamos egyenessel n téglalapra oszthatjuk. A négy eredeti oldalegyenessel együtt ez összesen $(n-1)+4=n+3$ egyenest jelent.

Most két bizonyítást adunk arra, hogy $n+3$-nál több különböző egyenest nem kaphatunk, tehát a feladat kérdésére a válasz 2025.

1. bizonyítás: Legyen a négyzet $N=[a,b]\times[c,d]$, a kis téglalapok $T_i=[a_i,b_i]\times[c_i,d_i]$, $i=1,\dots,n$. Be kell látnunk, hogy

$$|\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}|+|\{c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\}|\le n+3.$$

Legyen V a vízszintes oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(y=d)$ egyenest, ami N felső oldalegyenese, és legyen F a függőleges oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(x=a)$ és $(x=b)$ egyeneseket, amelyek N függőleges oldalegyenesei.

Tetszőleges $\ell\in V\cup F$ egyenesre definiájuk a $p(\ell)$ pontot a következő módon.

Ha ℓ vízszintes, akkor legyen $p(\ell)$ az $T_1,\dots,T_n$ kis téglalapok ℓ-en levő csúcsai közül a legbaloldalibb. Ha ℓ függőleges, akkor pedig a legalsó. Mivel $V\cup F$ nem tartalmazza N három oldalegyenesét, elég belátnunk, hogy $|V\cup F|\le n$. Könnyen látható, hogy minden $p(\ell)$ pont egy kis téglalap bal alsó sarka, ezért elég belátni, hogy a p leképezés injektív a $V\cup F$ halmazon.

Az világos, hogy ha ℓ és ℓ' különbözők és mindketten vízszintesek, vagy mindketten függőlegesek, akkor $p(\ell)\ne p(\ell')$.

Tegyük most fel, hogy $(y=\beta)=h\in V$, $(x=\alpha)=v\in F$ and $p(h)=p(v)=(\alpha,\beta)$. Mivel V nem tartalmazza az $(x=a)$ egyenest, $\alpha>a$. Ha $\beta=c$, akkor $p(h)=(a,c)\ne p(v)$, ezért $\beta>c$. Tehát ha $\varepsilon>0$ elég kicsi, akkor az $(\alpha-\varepsilon,\alpha)\times\{\beta\}$ nyílt szakaszt tartalmazza egy $T_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]$ kis téglalap a belsejében. De ekkor $b_j=\alpha$ és $c_j<\beta<d_j$, tehát a (b_j,c_j) csúcs v-n van és $c_j<\beta$, ami ellentmond $p(v)$ választásának.

Ezzel beláttuk, hogy legfeljebb $n+3$ oldalegyenes van.

2. bizonyítás: Tegyük fel, hogy van olyan e egyenes, amely metszi az N négyzet belsejét és pontosan egy T kis téglalap alsó oldalegyenese. Ekkor módosíthatjuk úgy a felbontást, hogy a kis téglalapok száma és az oldalegyenesek száma is pontosan eggyel csökken: az e egyenes másik, alsó oldalán lévő, T-vel szomszédos téglalapokat meghosszabbítjuk e-n keresztül úgy, hogy T megszűnik. Hasonlóan járhatunk el, ha van olyan e egyenes, amely metszi N belsejét és pontosan egy T kis téglalap felső, jobb oldali vagy bal oldali oldalegyenese. Hajtsuk végre ezt a műveletet, amíg lehetséges, tegyük fel, hogy a kapott felosztásban m kis téglalap van. Elég a kapott felosztásra belátni az állítást, hogy az oldalegyenesek száma legfeljebb $m+3$. Legyen O a kis téglalapok oldalegyeneseinek a halmaza, $O'\subset O$ pedig az olyan oldalegyenesek halmaza, amelyek N-nek nem oldalegyenesei. Tudjuk, hogy most minden O'-beli oldalegyenes legalább négy kis téglalaphoz tartozik, ugyanakkor egy kis téglalaphoz legfeljebb négy O'-beli oldalegyenes tartozik. Ebből azt kapjuk, hogy $|O'|\le m$. De ráadásul azokhoz a téglalapokhoz, amelyeknek van N-rel közös oldalegyenese, legfeljebb három O'-beli oldalegyenes tartozik. Ezért $|O'|\le m-1$. Mivel $|O|=|O'|+4$, $|O|\le m+3$, ezzel beláttuk az állítást.

2. feladat. Tegyük fel, hogy a 4-gyel osztva 3 maradékot adó p, q prímszámokra az $x^2 - pqy^2 = 1$ egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a $|px^2 - qy^2| = 1$ egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.

Megoldás: Legyenek x_0, y_0 olyan pozitív egészek, melyekre

$$x_0^2 - pqy_0^2 = 1,$$

és x_0 minimális azzal a tulajdonsággal, hogy $x^2 - pqy^2 = 1$ megoldható ezzel az x_0-lal és egy $y > 0$ egésszel. Mivel a pq szám 4-es maradéka 1, ezért y_0 nem lehet páratlan, hiszen az $x_0^2 = pqy_0^2 + 1$ négyzetszám 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot. Vagyis $2 \mid y_0$, azaz az

$$\frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = pq \left(\frac{y_0}{2}\right)^2. \tag{1}$$

egyenletben szereplő összes tényező egész szám. Tehát p és q is osztja a bal oldal egyik tényezőjét. Először megmutatjuk, hogy egyik tényező sem lehet osztható pq-val.

Ha ugyanis (1)-ben pq osztaná valamelyik tényezőt, akkor vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2pq} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2pq} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

adná a jobb oldalon szereplő négyzetszám felbontását két egész szám szorzatára. Mivel a két tényező mindkét esetben relatív prím, így külön-külön is négyzetszámok, azaz léteznek olyan a, b pozitív egész számok, melyekre

$$\frac{x_0 - 1}{2pq} = a^2, \quad \frac{x_0 + 1}{2} = b^2, \tag{2}$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2} = a^2, \quad \frac{x_0 + 1}{2pq} = b^2. \tag{3}$$

Az első esetben $b^2 - pqa^2 = 1$, de b és a is pozitív egészek, ez tehát ellentmondana x_0 minimalitásának, hiszen (2) miatt $b < x_0$. Ha pedig (3) teljesülne, akkor

$$a^2 - pqb^2 = -1$$

alapján az $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongruencia megoldható lenne, azonban $p \equiv -1 \pmod{4}$ miatt ez nem lehetséges. (Ugyanis a kis Fermat-tétel alapján $p \nmid a$ esetén $(a^2)^{(p-1)/2} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \not\equiv -1 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}$.)

Tehát (1)-ben pq nem osztja egyik tényezőt sem, így vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2p} \cdot \frac{x_0 + 1}{2q} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2q} \cdot \frac{x_0 + 1}{2p} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

adja a jobb oldalon szereplő négyzetszám felbontását két, egymáshoz relatív prím egész szám szorzatára. Ekkor a korábbiakhoz hasonlóan léteznek a, b pozitív egészek, melyekre vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2p} = a^2, \quad \frac{x_0 + 1}{2q} = b^2,$$

vagy

$$\frac{x_0-1}{2q}=a^2, \quad \frac{x_0+1}{2p}=b^2,$$

azaz $qb^2-pa^2=1$ vagy $pb^2-qa^2=1$, és készen vagyunk, mert $x=b, y=a$ vagy $x=a, y=b$ a $|px^2-qy^2|=1$ egyenlet pozitív egész megoldását adja.

3. feladat. Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$ $(1 \le i,j \le n)$ valós számokra $a_{i,j}+a_{j,i}=0$ minden i,j esetén (speciálisan $a_{i,i}=0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2 \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás: Először $a_{i,j}$ jelöljön tetszőleges valós számokat, és tekintsük a következő négyzetösszeget:

$$\sum_{i,j,i',j'}(a_{i,j}+a_{i',j'}-a_{i,j'}-a_{i',j})^2 \ge 0.$$

Ha a négyzetre emelést kifejtjük és tagonként szummázunk, akkor a következőképpen egyszerűsődnek az összegek. Egyrészt,

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j}^2 = n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

Pontosan ugyanezt kapjuk a többi négyzetes tag esetén is:

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j}^2=n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

A kettős szorzatoknál háromféle eredményt kapunk: két esetben (amikor az első indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j}a_{i,j'}=-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i',j}a_{i',j'}=-2n\sum_i\left(\sum_j a_{i,j}\right)^2;$$

két esetben (amikor a második indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j}a_{i',j}=-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j'}a_{i',j'}=-2n\sum_j\left(\sum_i a_{i,j}\right)^2;$$

illetve a maradék két esetben

$$\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j}a_{i',j'}=\sum_{i,j,i',j'}2a_{i',j}a_{i,j'}=2\left(\sum_{i,j}a_{i,j}\right)^2.$$

Ezeket összeadva és $4n^2$-tel osztva kapjuk a következő általános egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i,j}a_{i,j}^2-\frac{1}{n}\sum_i\left(\sum_j a_{i,j}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_j\left(\sum_i a_{i,j}\right)^2+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j}a_{i,j}\right)^2 \ge 0.$$

Felhasználva, hogy esetünkben $a_{i,j} = -a_{j,i}$, az utolsó tag eltűnik, a középső két tag pedig megegyezik, és a kívánt egyenlőtlenség azonnal adódik.

Mikor áll fenn egyenlőség? Ehhez a négyzetösszeg minden tagjának nullának kell lennie, azaz

$$a_{i,j} + a_{i',j'} = a_{i,j'} + a_{i',j}$$

minden i, j, i', j' esetén. Legyen $b_r = a_{r,1}$. Ekkor persze $a_{1,r} = -b_r$. A fenti egyenlőséget $i' = j' = 1$ esetben használva kapjuk, hogy

$$a_{i,j} + \underbrace{b_1}_{=0} = b_i - b_j.$$

Tehát ha egyenlőség áll fenn, akkor $a_{i,j}$ felírható $b_i - b_j$ alakban valamilyen $b_1, \ldots, b_n$ valós számokra. Megfordítva, könnyen látható, hogy ilyen alakú $a_{i,j}$ számokra a négyzetösszeg minden tagja 0, és így valóban egyenlőség van.