A 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak előzetes megoldásai

1. feladat. A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i = (a_i, b_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O = (0, 0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

1. megoldás: Legyenek t_2, t_1, t_0 a feladatbeli területek (ezeket pozitív számoknak tekintjük a háromszögek körüljárási irányától függetlenül). Legyen $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i)$. A $t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$ vektor mindegyik $\mathbf{v}_i$-vel párhuzamos (pl. $\mathbf{v}_0$-lal azért, mert a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok $\mathbf{v}_0$-ra merőleges komponensének aránya a $-t_2 : t_1$ aránnyal egyezik meg), ezért nullvektor.

Vegyük észre, hogy a feladatbeli egyenletrendszer ekvivalens az $x^2\mathbf{v}_0 + x\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ vektoregyenlettel. Ha t_2, t_1, t_0 mértani sorozat, akkor a kvóciens megoldása a feladatbeli egyenletrendszernek. Fordítva, ha x megoldása a feladatbeli egyenletrendszernek, akkor

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - t_2\mathbf{0} = (t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) - t_2(x^2\mathbf{v}_0 + x\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (t_0 - t_2x^2)\mathbf{v}_0 + (t_1 - t_2x)\mathbf{v}_1,$$

ahonnan, mivel $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{v}_1$ nem párhuzamos, $t_0 = x^2t_2$ és $t_1 = xt_2$, tehát t_2, t_1, t_0 mértani sorozat.

2. megoldás(vázlat): Vegyük észre, hogy a P_i pontokat az origó körül tetszőleges szöggel elforgatva a kérdéses területek nem változnak, másrészt a két régi egyenlet lineáris kombinációjaként előállítható mindkét új egyenlet, és fordítva. Ez azt jelenti, hogy elegendő az elforgatott pontokra belátni a feladatbeli ekvivalenciát. Hasonlóan, minden pont x koordinátáját megszorozhatjuk ugyanazzal a pozitív valós számmal.

Könnyen látható, hogy ilyen transzformációk egymásutánjával minden esetben eljuthatunk egy olyan ponthármashoz, amelynél $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, valamint $P_2 = (-a, -b)$ valamely pozitív a, b valós számokra. Ekkor a területek:

$$t_0 = a/2, \quad t_1 = b/2, \quad t_2 = 1/2;$$

a két egyenlet pedig a következő:

$$x^2 - a = 0, \quad x - b = 0,$$

mely esetben a kérdéses ekvivalencia nyilvánvaló.

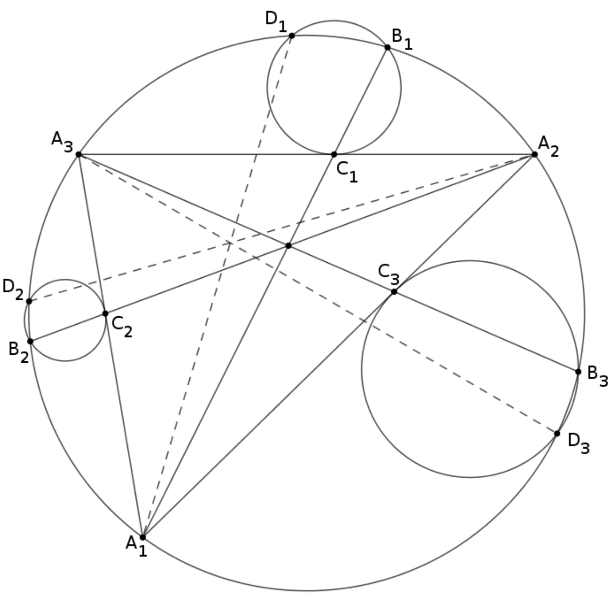
2. feladat. Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1, v_2, \ldots, v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1} illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1 \leq j \leq i$ esetén, ahol $v_{i+1} = v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1, u_2, \ldots, u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{k-1}u_k, u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.

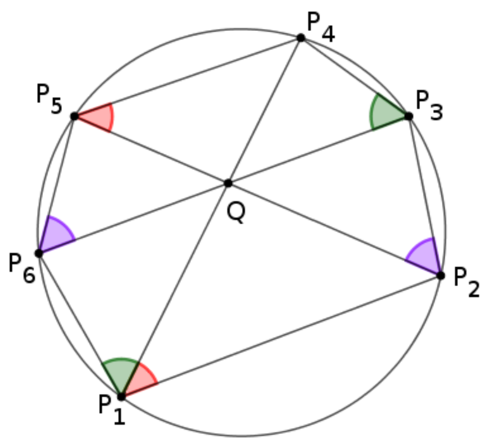
Megoldás: Minden lépésben válasszunk egy új légitársaságot (amit korábbi lépésekben még nem választottunk) és ennek a társaságnak egy járatát (azaz két várost, amik között közlekedik) arra ügyelve, hogy a kiválasztott járatokkal ne lehessen körutazást csinálni. Ezt addig csináljuk, ameddig tudjuk. Legfeljebb $n-1$ lépés lehetséges, hiszen n csúcsú körmentes gráfnak maximum $n-1$ éle lehet. Tehát mindenképp lesz olyan légitársaság, amit egyik lépésben sem választottunk.

Vegyük azt az állapotot, amikor elakadunk. A kiválasztott járatok által meghatározott gráf körmentes, így szükségképpen páros gráf, ami azt jelenti, hogy a városok megszínezhetők piros és kék színnel úgy, hogy minden kiválasztott járat egy piros és egy kék város között megy. Most vegyünk egy légitársaságot, amit egyik lépésben sem választottunk. Az ehhez tartozó páratlan körnek biztosan van olyan éle, ami két egyszínű várost köt össze. Mivel már nem tudtunk több lépést tenni, ez az él biztosan kört alkot néhány kiválasztott éllel. Ennek a körnek minden járata más légitársasághoz tartozik, és biztosan páratlan hosszú, mert két egyszínű várost kiválasztott éleknek csak páros hosszú útja köthet össze, végeztünk.

3. feladat. Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i = 1, 2, 3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest. (A pontokat modulo 3 számozzuk, tehát $A_4 = A_1$ és $A_5 = A_2$.) Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.

Megoldás: Mivel az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenes érinti a $B_iC_iD_i$ kört, a D_i pont a körülírt körnek ugyanazon az $A_{i+1}A_{i+2}$ ívén van, mint a B_i, tehát az A_i-vel szemközt; az $A_1, D_3, A_2, D_1, A_3, D_2$ ebben a sorrendben követik egymást a körön.





Lemma. Bármely $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ húrhatszögben, a P_1P_4, P_2P_5 és P_3P_6 átlók akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1$.

Biz. Ha a három átló egy közös Q ponton megy át, akkor az egyenlő kerületi szögek miatt $QP_1P_2\triangle \sim QP_5P_4\triangle$, $QP_3P_4\triangle \sim QP_1P_6\triangle$ és $QP_5P_6\triangle \sim QP_3P_2\triangle$, ezért

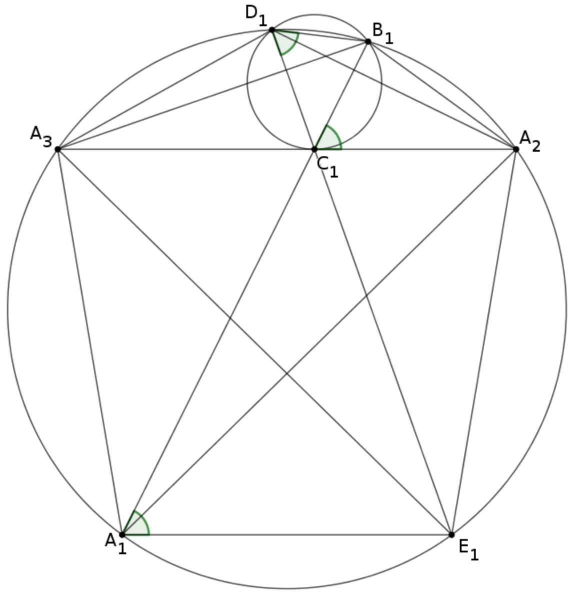
$$\frac{P_1P_2}{P_4P_5} \cdot \frac{P_3P_4}{P_6P_1} \cdot \frac{P_5P_6}{P_2P_3} = \frac{QP_1}{QP_5} \cdot \frac{QP_3}{QP_1} \cdot \frac{QP_5}{QP_3} = 1.$$

Megfordítva, ha $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1$, akkor legyen $Q = P_1P_4 \cap P_2P_5$, és legyen P_6' a körülírt kör és a P_3Q egyenes metszéspontja. Az előbbiek szerint $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6' = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6'P_1$; a kettőt összevetve $P_5P_6 : P_6P_1 = P_5P_6' : P_6'P_1$, márpedig ez az arány egyértelműen meghatározza a P_6 pontot, ezért $P_6' = P_6$. (Nincs szükség rá, de az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a $P_5P_6P_1$ körív félkörnél rövidebb, és akkor még jobban látszik az egyértelműség.)

Alternatív bizonyítás kettősviszonyokkal: a három átló átló akkor és csak akkor megy át egy ponton, ha $(P_1P_3P_2P_4) = (P_4P_6P_5P_1)$, ami rendezve $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1$.

A feltétel és a lemma szerint $A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3B_2 = B_1A_2 \cdot B_2A_3 \cdot B_3A_1$, és azt kell igazolnunk, hogy $A_1D_3 \cdot A_2D_1 \cdot A_3D_2 = D_1A_2 \cdot D_2A_3 \cdot D_3A_1$.

Legyen a körülírt kör és a D_1C_1 félegyenes metszéspontja E_1. A kerületi szögek tételéből $A_2C_1B_1\sphericalangle = C_1D_1B_1\sphericalangle = E_1D_1B_1\sphericalangle = E_1A_1B_1\sphericalangle$, így $A_1E_1 \parallel A_2A_3$; az $A_1E_1A_2A_3$ négyszög szimmetrikus trapéz, amelyben $A_2E_1 = A_1A_3$ és $A_3E_1 = A_1A_2$.



A $C_1A_3A_1\triangle \sim C_1B_1A_2\triangle$ és $C_1A_1A_2\triangle \sim C_1A_3B_1\triangle$ hasonlóságokból

$$\frac{A_2B_1}{C_1B_1} = \frac{A_3A_1}{C_1A_3} \quad \text{és} \quad \frac{B_1A_3}{C_1B_1} = \frac{A_1A_2}{C_1A_2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{A_2B_1}{B_1A_3} = \frac{A_3A_1}{A_1A_2} \cdot \frac{C_1A_2}{C_1A_3}.$$

Hasonlóan, a $C_1A_3E_1\triangle \sim C_1D_1A_2\triangle$ és $C_1E_1A_2\triangle \sim C_1A_3D_1\triangle$ hasonlóságokból

$$\frac{A_2D_1}{C_1D_1} = \frac{A_3E_1}{C_1A_3} = \frac{A_1A_2}{C_1A_3} \quad \text{és} \quad \frac{D_1A_3}{C_1D_1} = \frac{E_1A_2}{C_1A_2} = \frac{A_3A_1}{C_1A_2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{A_2D_1}{D_1A_3} = \frac{A_1A_2}{A_3A_1} \cdot \frac{C_1A_2}{C_1A_3}.$$

Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3} = \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_1A_2^2}{A_3A_1^2}. \tag{1}$$

Az (1) képletet hasonlóságok helyett, ismét csak kettősviszonyokkal is bizonyíthatjuk: legyen I_1 az A_2A_3 irányú ideális pont. A körülírt kört az A_1 pontból az A_2A_3 egyenesre, majd a D_1 pontból visszavetítve,

$$(A_2A_3B_1E_1) = (A_2A_3C_1I_1) = (A_2A_3D_1A_1);$$

kibontva

$$\frac{A_2B_1 \cdot E_1A_3}{B_1A_3 \cdot A_2E_1} = \frac{A_2D_1 \cdot A_1A_3}{D_1A_3 \cdot A_2A_1}$$

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3} = \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{E_1A_3 \cdot A_1A_2}{A_2E_1 \cdot A_1A_3} = \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_1A_2^2}{A_1A_3^2}.$$

Az indexelést ciklikusan elforgatva, az (1) megfelelői

$$\frac{A_3D_2}{D_2A_1} = \frac{A_3B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_2A_3^2}{A_1A_2^2} \quad \text{és} \quad \frac{A_1D_3}{D_3A_2} = \frac{A_1B_3}{B_3A_2} \cdot \frac{A_3A_1^2}{A_2A_3^2}$$

végül

$$\begin{aligned}\frac{A_2D_1}{D_1A_3} \cdot \frac{A_3D_2}{D_2A_1} \cdot \frac{A_1D_3}{D_3A_2} &= \left(\frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_1A_2^2}{A_3A_1^2}\right) \cdot \left(\frac{A_3B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_2A_3^2}{A_1A_2^2}\right) \cdot \left(\frac{A_1B_3}{B_3A_2} \cdot \frac{A_3A_1^2}{A_2A_3^2}\right) = \\ &= \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_1B_3}{B_3A_2} = 1.\end{aligned}$$