A 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak előzetes megoldásai

1. feladat. Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.

Megoldás: Legyen $k \geq 1$ rögzített. $10k$ helyett $9k$-t bizonyítunk, teljes indukcióval n szerint. Az állítás $n = 1$-re triviális, hiszen $9k \geq 9 > 1$. Tegyük fel, hogy $n > 1$ és kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen $\mathcal{D}$ az n darab zárt körlap halmaza, amelyek között nincs k-nál több páronként metsző. (Vagyis bármely $k+1$ között van két diszjunkt.) Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{D}$ a körlapjaink közül egy minimális sugarú. Feltehetjük, hogy D sugara 1 és középpontja O. Legyenek $D_1, \ldots, D_\ell \in \mathcal{D}$ a D-t metsző körlapok. Minden i-re $(1 \leq i \leq \ell)$, D_i sugara legalább 1. Legyen $x_i \in D \cap D_i$. Kicsinyítsük le D_i-t x_i-ből 1 sugarúra, D'_i a kapott körlap.

Legyen C az O középpontú 3 sugarú körlap. Mivel D'_i metszi D-t, $D'_i \subseteq C$. Ugyanakkor, mivel $D'_i \subseteq D_i$, a $D, D'_1, \ldots, D'_\ell$ egységsugarú körlapok között nincs k-nál több páronként metsző. Speciálisan, egy pontot sem tartalmaz közülük több, mint k. Ezért $\sum_{i=1}^{\ell} t(D'_i) + t(D) \leq kt(C)$, tehát $(\ell + 1)\pi \leq 9k\pi$, vagyis $\ell \leq 9k - 1$. ($t(X)$ az X területét jelenti.)

Az indukciós feltevés alapján osszuk be a $\mathcal{D} \setminus D$ halmazba tartozó körlapokat a feltételeknek megfelelően legfeljebb $9k$ osztályba. Mivel a D körlapot legfeljebb $9k - 1$ körlap metszi, a $9k$ osztály közül valamelyikben nincs a D-t metsző körök közül egy sem. Tegyük D-t ebbe az osztályba és ez egy megfelelő beosztását adja $\mathcal{D}$ körlapjainak. Ezzel beláttuk az állítást.

$\square$

2. feladat. Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra

- $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$,
- $f(2) = 1/2$.

Megoldás: Először vegyük észre, hogy

$$f(1) = f(1^2) = f(1)^2,$$

így $f(1) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$1/2 = f(2) = f(1+1) \leq f(1) + f(1) = 2f(1),$$

így $f(1) \geq 1/4$, ennélfogva $f(1) = 1$.

Vegyük azt is észre, hogy

$$f(-1)^2 = f((-1)^2) = f(1) = 1,$$

és mivel $f(-1) \geq 0$, ezért $f(-1) = 1$. Ebből az is következik, hogy minden $a \in \mathbf{Q}$-ra $f(-a) = f(-1)f(a) = f(a)$.

Továbbá az 1-hez hasonlóan a 0-ra is

$$f(0) = f(0^2) = f(0)^2,$$

így $f(0) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$f(0) \leq f(4) + f(-4) = 2f(2 \cdot 2) = 2f(2)f(2) = 1/2,$$

tehát $f(0) = 0$.

Legyen most $p \geq 3$ tetszőleges prímszám, belátjuk, hogy $f(p) \leq 1$. Legyen ugyanis indirekte $f(p) = \alpha > 1$. Tegyük fel, hogy p-nek a 2-es számrendszerben m jegye van, ekkor minden k-ra p^k-nak a 2-es számrendszerben legfeljebb mk jegye van. Ekkor p^k felírható legfeljebb mk darab 2-hatvány összegeként, a 2-hatványokon f legfeljebb 1, így azt kapjuk, hogy

$$\alpha^k = f(p^k) \leq mk,$$

ami ellentmondás, ha k elég nagy. [Ennek bizonyítása: legyen $h > 0$ olyan, hogy $1 + h < \alpha$. Ekkor $k \geq 2$-re $\alpha^k > (1+h)^k \geq 1 + \binom{k}{2}h^2 \geq 1 + k^2h^2/4$ (hiszen $\binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$, és mivel $k \geq 2$, a kivonandó k-t $k^2/2$-vel felülről becsülve $\binom{k}{2} \geq (k^2 - k^2/2)/2 = k^2/4$). Ha most $k > 4m/h^2$, akkor $k^2h^2/4 > mk$, tehát $\alpha^k > mk$, ami valóban ellentmondás.] Tehát valóban, $f(p) \leq 1$.

Jegyezzük fel, hogy ekkor, mivel minden egész szám prímek szorzata, azt is megkaptuk, hogy $f(n) \leq 1$, ha $n \in \mathbf{Z}$.

A következő lépésben ugyanerre a $p \geq 3$ prímre azt is belátjuk, hogy $f(p) < 1$ is ellentmondásra vezet. Tegyük fel ugyanis, hogy $f(p) = \beta < 1$. Válasszuk meg most k-t olyan nagynak, hogy $\beta^k < 1/2$. [Ezt megtehetjük: az előző részben látottak alapján $1/\beta > 1$-nek van olyan hatványa, ami 2-nél nagyobb, és ezen hatvány reciproka β egy 1/2-nél kisebb hatványa.] Mivel p^k páratlan szám, alkalmas $n \in \mathbf{Z}$-re $p^k + 2n = 1$, azaz

$$f(1) \leq f(p^k) + f(2n) = \beta^k + f(2)f(n) < 1/2 + 1/2 = 1,$$

ami ellentmondás.

Tehát az f függvény minden páratlan prímen az 1 értéket veszi fel.

A számelmélet alaptételének egyszerű következménye, hogy minden nem-0 racionális szám egyértelműen írható fel $2^k \cdot \frac{m}{n}$ alakban, ahol $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ egymáshoz relatív prím, páratlan számok, vagyis páratlan prímek szorzatai, k pedig egész (negatív is lehet). Az eddigiek alapján világos, hogy f értéke ezen racionális számnál 2^{-k} kell legyen.

Be kell még látnunk, hogy ez az f megfelel. A szorzási feltétel világos, az összeadásihoz pedig vegyük észre, hogy ha $a_1 = 2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1}$ és $a_2 = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ egymás ellentettje, akkor az állítás triviális, hiszen $f(0) = 0$. Ha pedig a_1 és a_2 nem egymás ellentettje, akkor az összegükben a 2-es kitevője legalább $\min(k_1, k_2)$, hiszen az összegük

$$\frac{2^{k_1}m_1n_2 + 2^{k_2}m_2n_1}{n_1n_2} = 2^{\min(k_1,k_2)} \cdot \frac{2^{k_1-\min(k_1,k_2)}m_1n_2 + 2^{k_2-\min(k_1,k_2)}m_2n_1}{n_1n_2},$$

a nevező páratlan, a számláló pedig egy egész szám, mely esetleg még tartalmazhat 2-eseket pozitív kitevővel, de negatívval biztosan nem. Ekkor

$$f(a_1 + a_2) \leq \min(f(a_1), f(a_2)) \leq f(a_1) + f(a_2),$$

így a bizonyítás kész.

$\square$

3. feladat. Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.

Megoldás:

A házak halmazát $\mathcal{S}$-sel fogjuk jelölni. Azt, hogy az s házat Télapó (a három közül) az i-edik évben (ahol $i \in \{1,2,3\}$) nem később látogatja meg, mint az s' házat úgy jelöljük, hogy $s \preceq_i s'$. Ez tehát azt jelenti, hogy vagy $s = s'$, vagy s-et (szigorúan) előbb látogatta meg, mint s'-t.

A házak ezen bejárási sorrendjeire úgy is hivatkozunk majd, mint a házak egy-egy sorbarendezése.

Legyen $n = 13$. Először megmutatjuk, hogy $N = (n-1)^3$ még nem elég. (Ebből persze következik, hogy ennél kisebb N értékek sem megfelelők.) Megadjuk az $\mathcal{S} = \{(i,j,k) : 1 \le i,j,k \le n-1\}$ halmaz elemeinek háromféle sorbarendezését úgy, hogy ne létezzen n elem, amelynek kétféle rendezés szerint is ugyanaz a sorrendje. A $\preceq_1$ rendezés legyen az úgy nevezett lexikografikus rendezés:

$$(i,j,k) \preceq_1 (i',j',k') \iff (i < i') \text{ vagy } (i = i' \text{ és } j < j') \text{ vagy } (i = i', j = j' \text{ és } k \le k').$$

A másik két rendezés definíciója hasonló, azzal a különbséggel, hogy bizonyos koordináták esetén „fordított” sorrendet veszünk. Legyen

$$(i,j,k) \preceq_2 (i',j',k') \iff (i > i') \text{ vagy } (i = i' \text{ és } j < j') \text{ vagy } (i = i', j = j' \text{ és } k \ge k'),$$

$$(i,j,k) \preceq_3 (i',j',k') \iff (i > i') \text{ vagy } (i = i' \text{ és } j > j') \text{ vagy } (i = i', j = j' \text{ és } k \le k').$$

Megvizsgáljuk, hogy ℓ darab (különböző) hármas milyen feltételek mellett alkothat növekvő sorrendet kétféle rendezés szerint is.

Először tegyük fel, hogy $(i_1,j_1,k_1) \preceq_1 \cdots \preceq_1 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$ és $(i_1,j_1,k_1) \preceq_2 \cdots \preceq_2 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$. A rendezések definíciójából rögtön következik, hogy $i_1 = \cdots = i_\ell =: i_0$. A hármasok tehát $(i_0,*,*)$ alakúak. Továbbá, egy rögzített j_0 mellett csak egyetlen $(i_0,j_0,*)$ alakú elem lehet a hármasok között, hiszen $(i_0,j_0,k) \preceq_1 (i_0,j_0,k')$ és $(i_0,j_0,k) \preceq_2 (i_0,j_0,k')$ esetén $k \le k'$-nek és $k \ge k'$-nek is teljesülnie kell. Tehát ebben az esetben $\ell \le n-1$.

Most tegyük fel, hogy $(i_1,j_1,k_1) \preceq_1 \cdots \preceq_1 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$ és $(i_1,j_1,k_1) \preceq_3 \cdots \preceq_3 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$. Az előző esethez hasonlóan következik, hogy $i_1 = \cdots = i_\ell =: i_0$ és $j_1 = \cdots = j_\ell =: j_0$, tehát a hármasok $(i_0,j_0,*)$ alakúak, számuk szintén legfeljebb $n-1$ lehet.

Végül tegyük fel, hogy $(i_1,j_1,k_1) \preceq_2 \cdots \preceq_2 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$ és $(i_1,j_1,k_1) \preceq_3 \cdots \preceq_3 (i_\ell,j_\ell,k_\ell)$. Ekkor a definíció alapján az derül ki, hogy bármely i_0 esetén csak egyetlen $(i_0,*,*)$ alakú hármas lehet, ekkor is $\ell \le n-1$.

Ez azt jelenti, hogy ebben a példában nincs n ház, amiket két évben is ugyanolyan sorrendben járt be Télapó.

Tehát $(n-1)^3$ még nem feltétlenül elég. Belátjuk, hogy $N = (n-1)^3 + 1$ már igen. Minden házhoz rendeljünk hozzá egy rendezett hármast a következő módon. Egy házhoz akkor rendeljük az (a,b,c) hármast, ha

- a a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első két rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,
- és ehhez hasonlóan, b a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első és a harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,

- végül c a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely a második és harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik.

Világos, hogy ha egy házhoz az (a, b, c) hármast rendeljük, akkor a, b, c pozitív egész számok, továbbá, ha van köztük olyan, ami legalább n, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát indirekten, hogy nincs köztük olyan, ami legalább n. A lehetséges hármasok száma $(n-1)^3$, így mivel $(n-1)^3+1$ ház van, a skatulya-elv szerint biztosan lesz két ház, s és s', amihez ugyanazt, mondjuk az (a, b, c) hármast rendeltük. A két ház közül valamelyiket a három év közül legalább kettőben előbb látogatta meg Télapó, mint a másikat. Az évek (és a házak) közötti logikai szimmetria alapján feltehető, hogy például s-et az első és a második évben előbb látogatta meg, mint s'-t. Tudjuk, hogy van egy a hosszú házsorozat, ami s'-vel kezdődik, és az első két rendezés szerint növekvő sorozatot alkot. Ennek elejére téve s-et egy s-sel kezdődő, $a+1$ hosszú, az első két rendezés szerint is növekvő házsorozatot kapunk, ami ellentmond annak, hogy s-hez is az (a, b, c) hármast rendeltük. Ez az ellentmondás igazolja, hogy valóban lesz megfelelő n hosszú házsorozat, vagyis n olyan ház, amit két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg.

Ezzel megmutattuk, hogy létezik megfelelő N érték, éspedig $N = (n-1)^3+1$. A feladatban $n = 13$, vagyis a legkisebb megfelelő N értéke $N = 1729$.

Megjegyzés. A megoldás során nem játszott szerepet, hogy $n = 13$. A feladatot azért ezzel a speciális értékkel tűztük ki, mert így a válasz éppen 1729, ami az úgy nevezett “taxicab number” (vagy Hardy-Ramanujan szám): a legkisebb olyan szám, ami kétféleképpen is előáll két (pozitív) köbszám összegeként: $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$. Ezen tulajdonsága a megoldás során persze nem játszott szerepet, de éppen idén volt Srinivasa Ramanujan halálának 100-adik évfordulója, így az ő tiszteletére választottuk ezt a speciális értéket.

$\square$